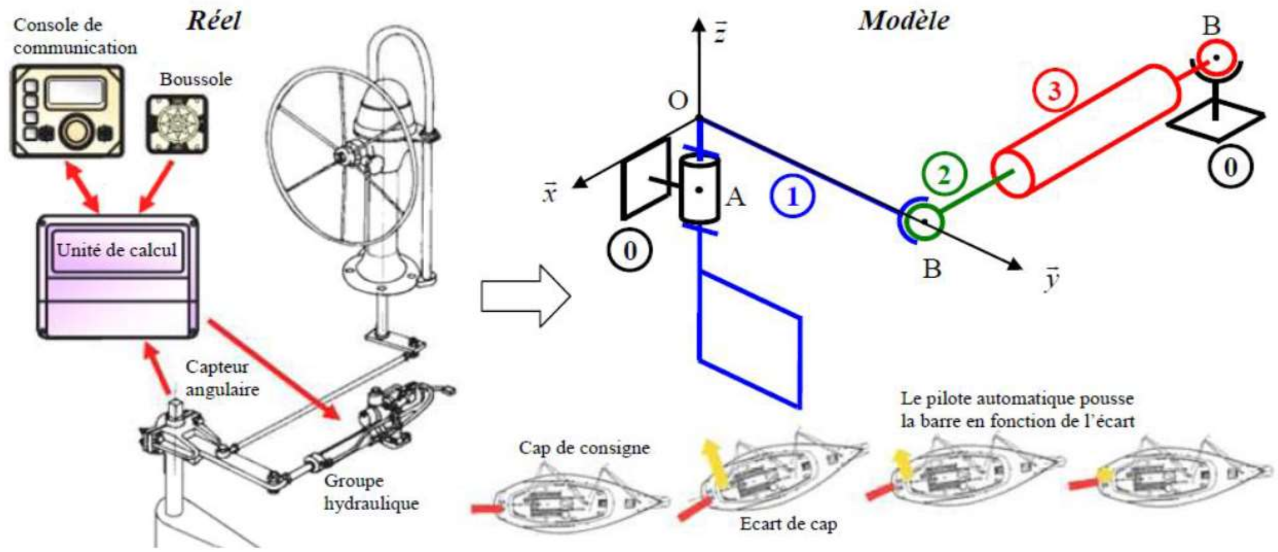
Résolution analytique des problèmes de statique (PFS)



Objectif :

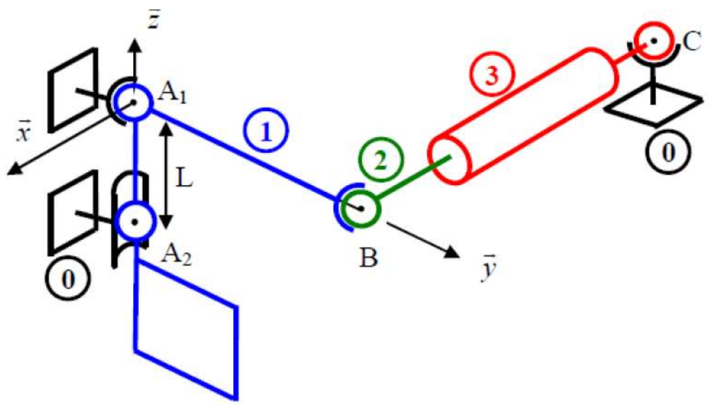
La statique étudie la relation de cause à effet entre l'équilibre relatif d'un système matériel et les actions mécaniques auxquelles ce système est soumis. L'objectif est de déterminer à partir des actions mécaniques connues les inconnus de liaison ainsi que la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre. Cette détermination permettra de dimensionner les éléments constituants les liaisons (paliers lisses, roulement, …) ou les actionneurs (moteurs, vérin, …).

Le système présenté dans ce cours est un pilote automatique de voilier qui permet d'ajuster automatiquement le cap d'un bateau sans l'intervention du marin. L'ensemble gouvernail - barre franche, est repéré 1. Lorsque le pilotage est automatique, l'ensemble gouvernail barre franche est actionné par un vérin linéaire repéré {2+3}.

L'objectif est de déterminer la pression dans le vérin lié à l'action de l'eau sur le gouvernail afin de dimensionner cet actionneur.

1. Modélisation du système

Le système est modélisé par le schéma cinématique suivant :



On note **1** le gouvernail, **2** la tige du vérin, **3** le corps du vérin et **0** le bateau.

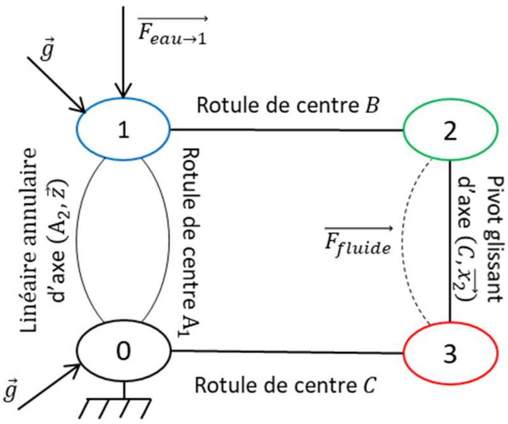
2. Graphe de structure

Le graphe de structure, ou graphe d'analyse, est un graphe de liaison auquel les actions mécaniques sont ajoutées.

- Les **actions mécaniques extérieures** au système correspondent à toutes les actions mécaniques **exercée par le milieu extérieur** (solide, fluide, ressort, pesanteur, …) qui agissent **sur un élément du système.**
- Les **actions mécaniques intérieures** correspondent à toutes les actions mécaniques **exercée par un élément** (solide, fluide, ressort, …) appartenant au **système** qui agit **sur un autre élément du système.**

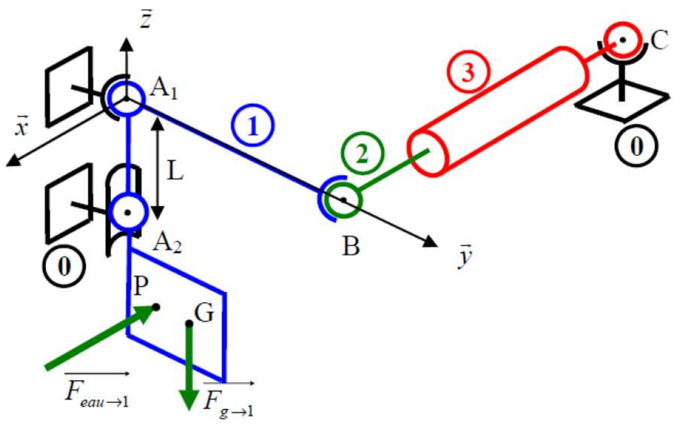
Graphe de structure du pilote automatique

Q.1. **Réaliser dans un premier temps le graphe de liaison.**



L'énoncé lié à la modélisation est le suivant :

- L'eau exerce une action mécanique sur le gouvernail **1** modélisée globalement par une force $\overrightarrow{F_{eau\to1}} = -F_{eau}.\vec{x}$ en P.
- Le fluide exerce une action mécanique sur le corps du vérin **3** ainsi que sur la tige du vérin **2** de direction $\overrightarrow{x_2} = \vec{x}$.
- Seuls les ensembles **0** et **1** sont soumis à l'action mécanique de la pesanteur $\vec{g}$ (c'est-à-dire qu'on fait l'hypothèse que les poids des solides **2** et **3** sont négligés).



Q.2. **Ajouter les actions mécaniques sur le graphe de liaison pour en faire un graphe de structure.**

3. Isolement et bilan des actions mécaniques extérieures

Une étude statique (ou dynamique) consiste à déterminer des actions mécaniques inconnues à partir des actions mécaniques connues. Pour cela, il est nécessaire de réaliser un isolement.

- L'**isolement** consiste à définir une frontière fictive qui englobe le système isolé E. Cette frontière fictive permet d'identifier un milieu intérieur au système isolé et un milieu extérieur $\bar{E}$ au système isolé. Cette frontière fictive est tracée sur le graphe de structure.
- Le **bilan des actions mécaniques extérieurs (BAME)** consiste à répertorier toutes les actions mécaniques qui traversent la frontière de l'isolement, c'est-à-dire toutes les actions mécaniques exercées par le milieu extérieur $\bar{E}$ sur le système isolé E.

Remarques :

- Le système isolé E peut être un solide, un ensemble de solides, le système entier, …
- Afin de résoudre un problème de statique ou de dynamique, il est souvent nécessaire de réaliser plusieurs isolements successifs.
- Nous allons voir que les actions mécaniques intérieures n'interviennent pas dans les équations de la statique. L'isolement est alors à choisir de sorte à avoir une grandeur inconnue et des grandeurs connues.

On n'isole jamais le bâti !

- En effet, le bâti est fixe, c'est-à-dire qu'il est en liaison encastrement avec le milieu extérieur au système, il apporte alors 6 inconnues de liaison qu'il n'est a priori pas possible à déterminer ou inutile.

4. Principe Fondamental de la Statique (PFS)

4.1. Définitions

4.1.1. Rappel : repère et référentiel galiléen

- Un **repère (d'espace)** est constitué d'un **point d'origine $\boldsymbol{O}$ et d'une base orthonormée** $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On note $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- Un **repère de temps** est un **repère unidimensionnel** orienté dans le sens de la succession des événements dans le temps.
- On appelle **repère galiléen** un repère d'espace fixe ou en translation rectiligne uniforme par rapport à l'ensemble de l'univers. **Son accélération absolue est alors nulle.** Pour une étude mécanique des systèmes industriels courants, **un repère lié à la Terre** constitue une bonne approximation du repère galiléen.
- Un **référentiel galiléen** est donc un **repère galiléen associé à un repère de temps.**

4.1.2. Équilibre

Un système E est en équilibre dans un référentiel galiléen si, au cours du temps, chaque point de E conserve la même position par rapport au repère galiléen.

4.2. Énoncé du PFS

La condition **nécessaire** pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un référentiel galiléen est que la somme des torseurs des actions mécaniques extérieures à E soit nulle.

$$\sum\{\mathcal{T}_{\bar{E}\to E}\} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}} \\ \overrightarrow{M_{A(\bar{E}\to E)}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$, où A est un point quelconque

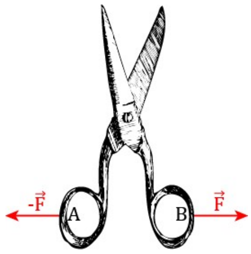
Lorsque l'on somme des torseurs ces derniers doivent tous être écrits au même point !

Les actions mécaniques intérieures ne sont pas prises en compte lors de l'écriture du principe fondamental de la statique.

La condition $\sum\{\mathcal{T}_{\bar{E}\to E}\} = \{0\}$ est une **condition nécessaire mais pas suffisante !**

$$\textbf{Équilibre de } \boldsymbol{E} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sum\{\boldsymbol{\mathcal{T}_{\bar{E}\to E}}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Contre-exemple des ciseaux



On isole les ciseaux et on considère le référentiel galiléen.
Les deux forces sont de même norme, de même direction mais de sens opposé. Ainsi $\vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$, en exprimant le PFS au centre de la rotation, il n'y a pas de moment non plus.

D'où $\sum\{\mathcal{T}_{\bar{E}\to E}\} = \{0\}$, pour autant les ciseaux s'ouvrent, ils ne sont pas statiques !

4.3. Théorèmes généraux de la statique (traduction vectorielle du PFS)

L'énoncé du PFS conduit à l'écriture de deux équations vectorielles soit :

- TRS - théorème de la résultante statique : $\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}} = \vec{0}$
- TMS - théorème du moment statique (ici en A) : $\overrightarrow{M_{A(\bar{E}\to E)}} = \vec{0}$

4.3.1. Problème spatial

Le théorème de la résultante statique et le théorème du moment statique sont projetés sur les 3 axes d'une même base, ce qui conduit à **6 équations scalaires.**

4.3.2. Problème plan

Le théorème de la résultante statique projetés sur les 2 axes du plan fourni 2 équations et le théorème du moment statique projeté sur l'axe normal au plan fourni 1 équation, ce qui conduit à **3 équations scalaires.**

4.4. Théorème des actions réciproques

Soient deux solides 1 et 2 qui exercent chacun des actions mécaniques l'un sur l'autre. On a :

$$\{\boldsymbol{\mathcal{T}_{2\to 1}}\} = -\{\boldsymbol{\mathcal{T}_{1\to 2}}\}$$

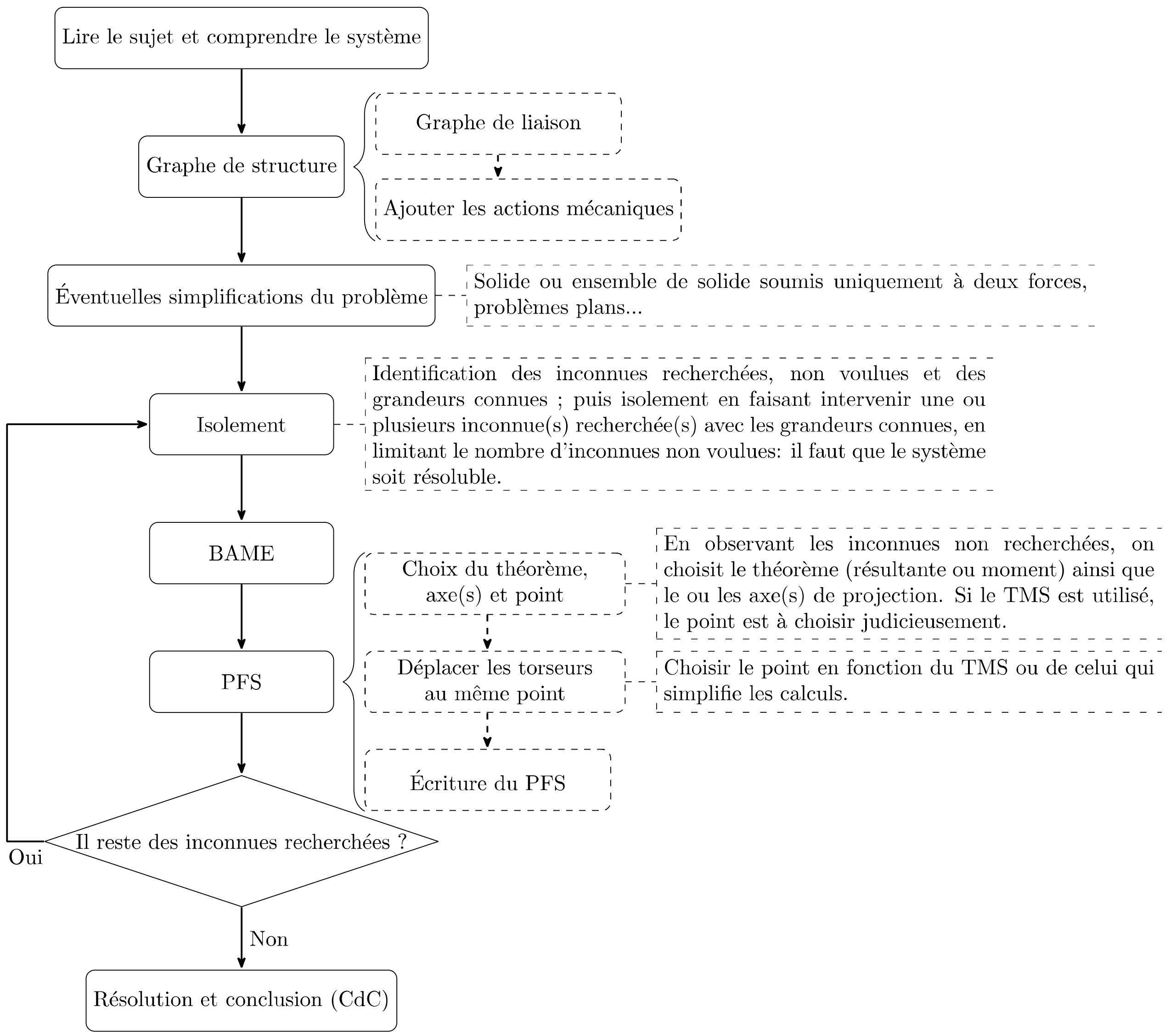
4.5. Cas particulier d'un système soumis à deux glisseurs (deux forces)

Si un système en équilibre subit l'action unique de deux forces alors ces forces sont de même norme, de même direction et de sens opposés.
La direction est la droite passant par les deux points d'application des forces.

Remarques :

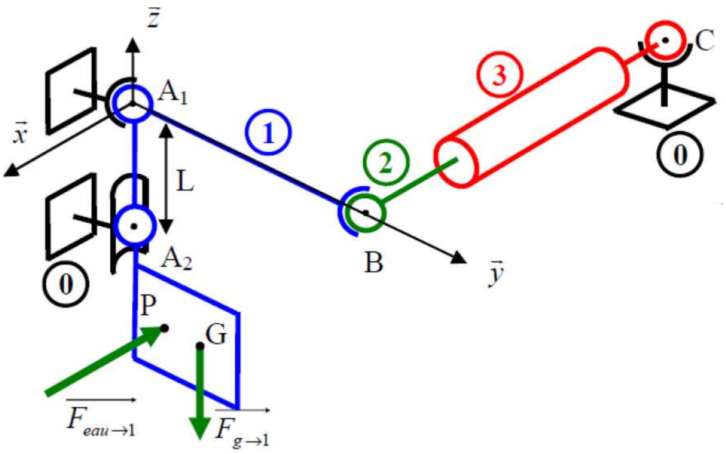
- Ce cas particulier est **très fréquent**, par exemple pour les ressorts, les vérins…
- Il advient de **toujours** rechercher ce cas particulier dès le début du problème afin de le simplifier.

5. Méthode générale de résolution analytique pour des problèmes de statique



6. Application au pilote automatique de voilier

Objectif de l’étude : Déterminer la pression dans le vérin lié à l’action de l’eau sur le gouvernail.

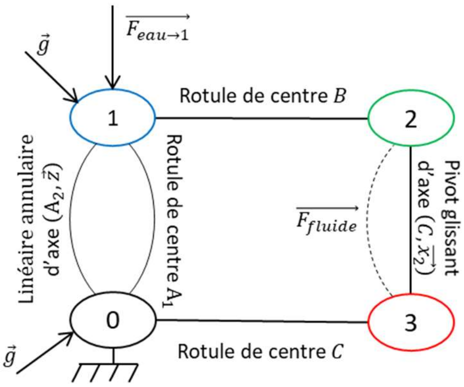


Données supplémentaires :

$$\overrightarrow{A_1B} = y_b\vec{y}\,,\overrightarrow{A_1G} = y_G\vec{y} + z_G\vec{z}\,,\overrightarrow{A_1P} = y_P\vec{y} + z_P\vec{z}$$

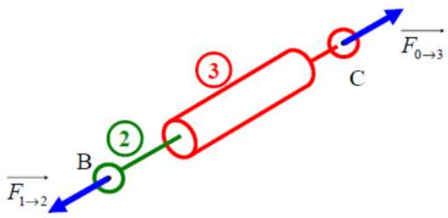
Graphe de structure

Réalisé précédemment :



Simplification du problème

On remarque que l’ensemble {2+3} (vérin) n’est soumis qu’à l’action unique de deux forces, ainsi ces deux forces sont de même norme, de sens opposés et de même direction. La direction passe par les points d’application des forces.



$\overrightarrow{F_{1\to 2}}$ et $\overrightarrow{F_{0\to 3}}$ ont donc pour direction la droite $(B, \vec{x})$ et :

$$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = -\overrightarrow{F_{0\to 3}} = \overrightarrow{F_{3\to 0}} = X_{12}\vec{x}$$

Isolement

On cherche à déterminer F_{fluide} en fonction de F_{eau}.

- En isolant **2**, on détermine une relation entre $\overrightarrow{F_{1\to 2}}.\vec{x} = X_{12}$ et F_{fluide} à l’aide du TRS suivant $\vec{x}$.
- L’inconnue recherchée est maintenant X_{12}, les actions mécaniques connues sont $\overrightarrow{F_{eau\to 1}}$ et $\overrightarrow{F_{g\to 1}}$. En isolant **1**, l’écriture du TMS au point A_1 projeté sur l’axe $\vec{z}$ permet d’obtenir une équation scalaire qui relie directement X_{12} à y_P, y_B et F_{eau}.
- Avec les deux équations on a bien une expression de F_{fluide} en fonction de F_{eau}.

On isole **2**.

BAME

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\}=\begin{Bmatrix}X_{12} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{(B,\vec{x},-,-)}\ ;\ \{\mathcal{T}_{fluide\to2}\}=\begin{Bmatrix}F_{fluide} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{(B,\vec{x},-,-)}\ ;\ \{\mathcal{T}_{3\to2}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ Y_{32} & M_{32}\\ Z_{32} & N_{32}\end{Bmatrix}_{(B,-,\vec{y},\vec{z})}$$

PFS

Tous les torseurs sont exprimés en B, le théorème de la résultante statique suivant $\vec{x}$ donne :

$$X_{12}+F_{fluide}+0=0\Leftrightarrow X_{12}=-F_{fluide}\quad(1)$$

Il reste des inconnues recherchées ? Oui

Isolement

On isole **1**.

BAME

En A_1 : $\{\mathcal{T}_{0\to1}^{Rotule}\}=\begin{Bmatrix}X_{R01} & 0\\ Y_{R01} & 0\\ Z_{R01} & 0\end{Bmatrix}_{(A_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

En A_2 : $\{\mathcal{T}_{0\to1}^{LA}\}=\begin{Bmatrix}X_{LA01} & 0\\ Y_{LA01} & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{(A_2,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

En P : $\{\mathcal{T}_{eau\to1}\}=\begin{Bmatrix}-F_{eau} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{(P,\vec{x},-,-)}$

En G : $\{\mathcal{T}_{g\to1}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -mg & 0\end{Bmatrix}_{(G,-,-,\vec{z})}$

En B : $\{\mathcal{T}_{2\to1}\}=\begin{Bmatrix}X_{21} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{(B,\vec{x},-,-)}$

PFS

Le théorème du moment statique en A_1 projeté sur $\vec{z}$ permet d'éviter les inconnues de $0\to1$ tout gardant X_{21} et F_{eau}.

Exprimons les moments au point A_1 projeté sur $\vec{z}$:

$$\overrightarrow{M_{A_1,eau\to1}}\cdot\vec{z}=y_PF_{eau}$$

$$\overrightarrow{M_{A_1,0\to1}^{R}}\cdot\vec{z}=0$$

$$\overrightarrow{M_{A_1,0\to1}^{LA}}\cdot\vec{z}=0$$

$$\overrightarrow{M_{A_1,g\to1}}\cdot\vec{z}=0$$

$$\overrightarrow{M_{A_1,2\to1}}\cdot\vec{z}=-y_BX_{21}$$

Écriture du PFS **1** au point A_1 : $\sum\{\mathcal{T}_{\bar{E}\to E}\}=\{0\}$

$$\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{eau\to1}}\\ \overrightarrow{M_{A_1,eau\to1}}\end{Bmatrix}_{A_1}+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{0\to1}^{Rotule}}\\ \overrightarrow{M_{A_1,0\to1}^{R}}\end{Bmatrix}_{A_1}+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{0\to1}^{LA}}\\ \overrightarrow{M_{A_1,0\to1}^{LA}}\end{Bmatrix}_{A_1}+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{g\to1}}\\ \overrightarrow{M_{A_1,g\to1}}\end{Bmatrix}_{A_1}+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{2\to1}}\\ \overrightarrow{M_{A_1,2\to1}}\end{Bmatrix}_{A_1}=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{A_1}$$

Théorème du moment statique en A_1 projeté sur $\vec{z}$.

$$\left(\overrightarrow{M_{A_1,eau\rightarrow 1}} + \overrightarrow{M^R_{A_1,0\rightarrow 1}} + \overrightarrow{M^{LA}_{A_1,0\rightarrow 1}} + \overrightarrow{M_{A_1,g\rightarrow 1}} + \overrightarrow{M_{A_1,2\rightarrow 1}}\right)\cdot \vec{z} = 0$$

$$y_P.F_{eau} + 0 + 0 + 0 - y_B.X_{21} = 0$$

$$X_{21} = \frac{y_P}{y_B}F_{eau} \qquad (2)$$

Résolution et conclusion

Les équations (1) et (2) donne :

$$X_{12} = -F_{fluide} \qquad (1)$$

$$X_{21} = \frac{y_P}{y_B}F_{eau} \qquad (2)$$

$$F_{fluide} = \frac{y_P}{y_B}F_{eau} \text{ car } X_{12} = -X_{21}$$

L'énonce donne :

- *Force exercée par l'eau* $F_{eau} = 600\ N$
- $y_P = 200\ mm$
- $y_B = 600\ mm$
- *Diamètre du piston du vérin* $D = 30\ mm$

Applications numériques :

$$F_{fluide} = 200\ \text{N}$$

Pression dans le piston :

$$p = \frac{F_{fluide}}{S} = \frac{4F_{fluide}}{\pi D^2} = \frac{800}{\pi 30^2} = 0{,}28\ \text{MPa} = 2{,}8\ \text{bar}$$

Remarque : La stratégie de résolution n'est pas unique (comme souvent).

- On peut isoler **1** pour trouver une relation entre $\overrightarrow{F_{eau\rightarrow 1}}$ et $\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}}$ puis isoler **2** pour trouver une relation entre $\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}}$ et $\overrightarrow{F_{fluide}}$. On remarque qu'il est équivalent à isoler **2** puis isoler **1**, c'est à dire que l'ordre n'a pas d'importance. Avec ces deux équations on a bien une relation entre $\overrightarrow{F_{fluide}}$ et $\overrightarrow{F_{eau\rightarrow 1}}$.
- On peut aussi isoler {**1+2**} et appliquer le TMS en $\vec{z}$ pour trouver une relation entre F_{eau}, F_{fluide} et N_{32} qui est une inconnue de liaison de la pivot glissant entre 3 et 2 (moment suivant $\vec{z}$) ; puis isoler 2 et appliquer le TRS suivant $\vec{z}$ pour trouver que $N_{32} = 0$.

7. Schéma d'architecture et graphe de structure

Le **schéma cinématique** utilisé jusqu'à présent et que l'on construit en parallèle d'un **graphe des liaisons,** est un outil qui permet de modéliser un système réel dans le but de réaliser des **études cinématiques.** Il permet de visualiser les mouvements relatifs des différentes classes d'équivalence cinématique d'un mécanisme et **ne tient pas compte de l'agencement des composants technologiques** utilisés pour réaliser les différentes liaisons du mécanisme.

Un des objectifs des **problèmes de statique** étant de dimensionner les composants technologiques constituant les liaisons, l'outil schéma cinématique minimal n'est donc pas adapté pour ces problèmes. On utilise par conséquent le **schéma d'architecture** (il peut simplement être appelé **schéma cinématique**), qui permet de visualiser l'architecture d'un système et qui tient compte des composants technologiques.

Exemple du pilote automatique de bateau

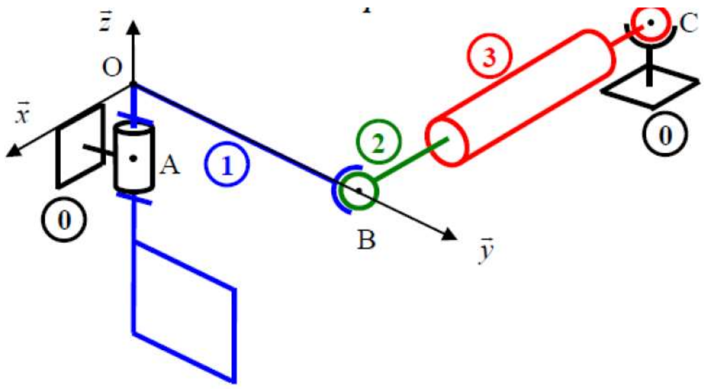


Schéma cinématique

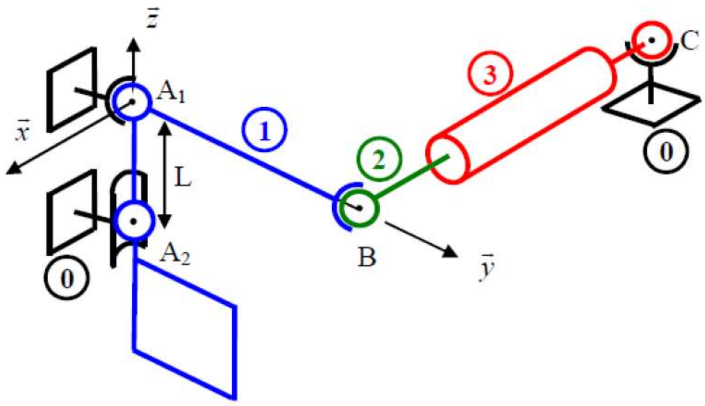


Schéma d'architecture

La liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ entre l'ensemble gouvernail - barre franche (1) et la coque du voilier (0) est un modèle adapté pour une étude cinématique. Il traduit le mouvement de $1/0$ observé sur le système réel.

Dans le cas d'une étude statique, il faut tenir compte des composants technologiques utilisés pour réaliser cette liaison. En l'occurrence, on utilise deux roulements à billes à contact radial ayant pour centre de poussée respectifs les points A_1 et A_2 éloignés d'une distance L. On choisit donc de modéliser ces composants technologiques par une liaison rotule de centre A_1 et une liaison linéaire annulaire en A_2 d'axe $(A_2, \vec{z})$ ce qui permettra de déterminer les actions mécaniques sur chacun des centres de poussée des roulements et donc de dimensionner ces derniers.