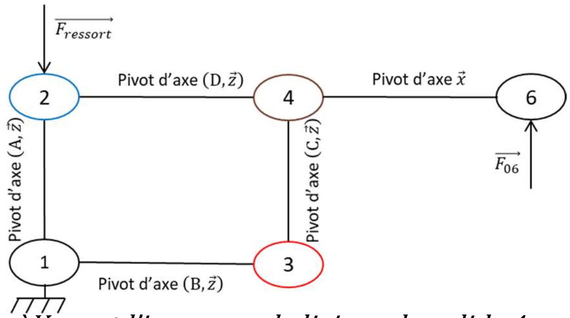
Statique analytique - correction

1. Suspension automobile

Q.1. *Proposer un graphe d'analyse pour le système étudié.*



Q.2. *Montrer que $Y_{43} = 0$, où Y_{43} est l'inconnue de liaison du solide 4 sur le solide 3 suivant $\vec{y}$.*

On isole 3 car il est soumis à 2 action mécanique.

$$\{\mathcal{T}_{1\to 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{13} & - \\ Y_{13} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(B,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} , \{\mathcal{T}_{4\to 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{43} & - \\ Y_{43} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

D'après le PFS, les résultantes de ces deux actions mécaniques sont de même norme et de sens opposée (suivant $\overrightarrow{BC}$). Donc $Y_{13} = Y_{43} = 0$ et $X_{13} = -X_{43}$.

Q.3. *Déterminer les équations obtenues en appliquant le P.F.S à l'ensemble* $\mathbf{4+6}$ *au point D.*

On isole $\{4+6\}$, BAME :

$$\{\mathcal{T}_{3\to 4}\} = \begin{Bmatrix} -X_{43} & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} -X_{43} & - \\ 0 & - \\ - & -aX_{43} \end{Bmatrix}_{(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$, \{\mathcal{T}_{0\to 6}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ F_{06} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(K,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ F_{06} & - \\ - & (c+e)F_{06} \end{Bmatrix}_{(D,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} ,$$

$$\{\mathcal{T}_{2\to 4}\} = \begin{Bmatrix} X_{24} & - \\ Y_{24} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(D,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\overrightarrow{M_{D,0\to 6}} = \big((c+e)\vec{x} - (a+\mu)\vec{y}\big) \wedge F_{06}\,\vec{y} = (c+e)F_{06}\,\vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_{D,3\to 4}} = (+c\vec{x} - a\vec{y}) \wedge -X_{43}\,\vec{x} = -aX_{43}\vec{z}$$

Le PFS nous donne les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} X_{24} - X_{43} = 0 \\ F_{06} + Y_{24} = 0 \\ (c+e)F_{06} - aX_{43} = 0 \end{cases}$$

Q.4. *Montrer que $X_{92} = 0$, où X_{92} est la force appliquée par le ressort sur le solide 2 suivant $\vec{x}$.*

Le ressort est suivant $\overrightarrow{JH}$ (suivant $\vec{y}$ donc), alors $\overrightarrow{F_{ressort\to 2}}.\vec{x} = 0 = X_{92}$

Q.5. *Déterminer les équations obtenues en appliquant le P.F.S au solide **2** au point A.*

BAME :

$$\{\mathcal{T}_{9\to2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{92} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(H,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{92} & - \\ - & \mathrm{L}Y_{92} \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$,\{\mathcal{T}_{4\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_{42} & - \\ Y_{42} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(D,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} X_{42} & - \\ Y_{42} & - \\ - & \mathrm{d}Y_{42} \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})},$$

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\overrightarrow{M_{A,9\to2}} = (L\vec{x} - h\vec{y}) \wedge Y_{92}\,\vec{y} = LY_{92}\,\vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_{A,4\to2}} = d\vec{x} \wedge (X_{42}\vec{x} + Y_{42}\,\vec{y}) = dY_{42}\,\vec{z}$$

Le PFS nous donne les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} X_{42} + X_{12} = 0 \\ Y_{92} + Y_{42} + Y_{12} = 0 \\ \mathrm{L}Y_{92} + \mathrm{d}Y_{42} = 0 \end{cases}$$

Q.6. *A partir des 6 équations déterminées précédemment, écrire une relation entre Y_{92} et F_{06}.*

$$\mathrm{L}Y_{92} + \mathrm{d}Y_{42} = 0$$

$$F_{06} + Y_{24} = 0$$

Or $Y_{24} = -Y_{42}$ *d'où* $Y_{92} = -\frac{dF_{06}}{L}$.

Q.7. *Conclure quant à la capacité de la suspension à satisfaire le critère de la fonction FS1.*

Application numérique : $\mathrm{F}_{06} = \frac{2200*10}{4} = 5500\ \mathrm{N}$

$\mathrm{Y}_{92} = -\frac{\mathrm{dF}_{06}}{\mathrm{L}}$ or Y_{92} est la force d'un ressort d'où $\mathrm{Y}_{92} = \mathrm{k}(\Delta\mathrm{L})$

$$\Rightarrow \mathrm{k}(\Delta\mathrm{L}) = -\frac{\mathrm{dF}_{06}}{\mathrm{L}} \Rightarrow \Delta\mathrm{L} = -\frac{\mathrm{dF}_{06}}{\mathrm{Lk}} = -\frac{0{,}25 * 5500}{0{,}15 * 100000} = -0{,}09\mathrm{m} < -0{,}15\mathrm{m}$$

Donc le critère est bien respecté.

Q.8. *A partir des équations déterminées précédemment, déterminer toutes les inconnues d'effort en fonction de F_{06}.*

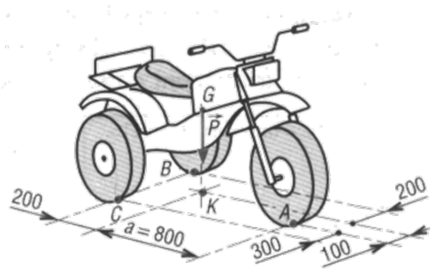
En combinant les équations obtenues à la question 3 et 5 on obtient :

$$\begin{cases} Y_{24} = -F_{06} \\ X_{43} = \frac{(c+e)F_{06}}{a} \\ X_{24} = \frac{(c+e)F_{06}}{a} \\ X_{12} = \frac{(c+e)F_{06}}{a} \\ Y_{92} = -\frac{dF_{06}}{L} \\ Y_{12} = F_{06}\left(\frac{d}{L} - 1\right) \end{cases}$$

Correction TD08-03
Statique analytique

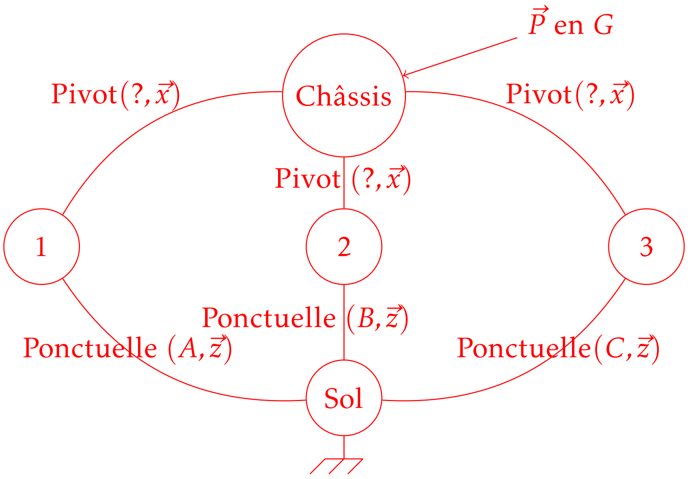
1. Moto à trois roues

On considère une moto à trois roues à l'arrêt sur un terrain plat.
Les roues de la moto sont en contact ponctuel avec le sol en A, B et C.
Le poids de la moto est modélisable par le vecteur $\vec{P} = -3000\vec{z}$ (N) appliqué au centre de gravité G de la moto.
Le point K est défini comme le projeté de G sur le plan $(\vec{x},\vec{y})$, de plus $\overrightarrow{KA} = a\vec{y}$.
On note **1** la roue avant, **2** la roue arrière gauche, **3** la roue arrière droite et **0** le sol.



Question 1: Déterminer les actions mécaniques en A, B et C.

Réponse 1: Le graphe de structure est le suivant :



On isole la moto $\{1+2+3+$châssis$\}$, le BAME donne :

$\{\mathcal{T}_{poids\to moto}\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{P} = -P\vec{z}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$; $\{\mathcal{T}_{0\to 1}\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_{0\to 1}} = R_{01}\vec{z}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_A$;

$\{\mathcal{T}_{0\to 2}\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_{0\to 2}} = R_{02}\vec{z}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_B$; $\{\mathcal{T}_{0\to 3}\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_{0\to 3}} = R_{03}\vec{z}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_C$

Le théorème de la résultante statique sur $\vec{z}$ s'écrit :

$$-P + R_{01} + R_{02} + R_{03} = 0$$

Le théorème du moment statique en B (par exemple) s'écrit :

$\overrightarrow{M_{B,poids\to moto}} + \overrightarrow{M_{B,0\to 1}} + \overrightarrow{M_{B,0\to 2}} + \overrightarrow{M_{B,0\to 3}} = \vec{0}$

La relation de Varignon donne :

- $\overrightarrow{M_{B,poids\to moto}} = \overrightarrow{M_{G,poids\to moto}} + \overrightarrow{BG}\wedge -P\vec{z} = (200\vec{x}+200\vec{y}+?\vec{z})\wedge -P\vec{z} = 200P(\vec{y}-\vec{x})$
- $\overrightarrow{M_{B,0\to 1}} = \overrightarrow{M_{A,0\to 1}} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{R_{0\to 1}} = (300\vec{x}+1000\vec{y})\wedge R_{01}\vec{z} = -300R_{01}\vec{y} + 1000R_{01}\vec{x}$
- $\overrightarrow{M_{B,0\to 3}} = \overrightarrow{M_{C,0\to 3}} + \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{R_{0\to 3}} = 600\vec{x}\wedge R_{03}\vec{z} = -600R_{03}\vec{y}$

Ainsi :

$$200P(\vec{y}-\vec{x}) - 300R_{01}\vec{y} + 1000R_{01}\vec{x} - 600R_{03}\vec{y} = \vec{0}$$

Soit en projection sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$: $\left\{\begin{array}{l}-200P + 1000R_{01} = 0\\ 200P - 300R_{01} - 600R_{03} = 0\end{array}\right.$

On en déduit :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}R_{01} = \dfrac{1}{5}P = 600N\\ R_{02} = \dfrac{1}{6}(2P - 3R_{01}) = \dfrac{7}{30}P = 700N\\ R_{03} = P - R_{01} - R_{02} = \dfrac{17}{30}P = 1700N\end{array}\right.}$$

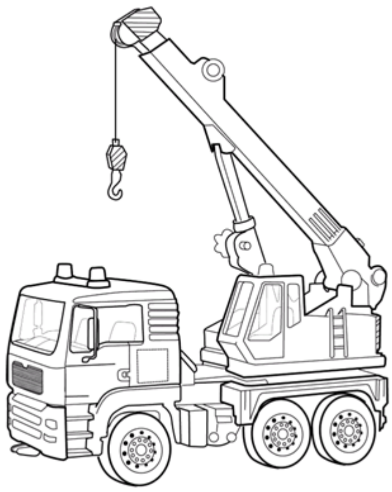
2. Camion grue

Le système étudié est un camion grue dont le cahier des charges fonctionnel définit la fonction de service FS1 «*permettre au conducteur de soulever la charge*», dont le critère «*masse de la charge*» possède un niveau $M_{maxi} < 10000kg$.

L'objectif de cet exercice est de vérifier que le dimensionnement du vérin retenu est satisfaisant sachant qu'il peut développer un effort de $1\times 10^6 N$.

Le système est modélisé comme suit :

- La liaison pivot entre S_0 et S_1, la liaison pivot-glissant entre S_2 et S_3 et les liaisons sphériques entre S_0 et S_3 et entre S_1 et S_2 sont supposées parfaites.
- Les actions de la pesanteur sur les pièces de la grue sont négligées devant l'action de pesanteur $\vec{F} = -Mg\vec{y}$ sur la charge qui est soulevée.
- L'action du fluide dans le vérin sur la tige du vérin S_2 est modélisée par un glisseur $\overrightarrow{F_{huile \to S_2}}$ dirigé suivant $\vec{x_2}$.

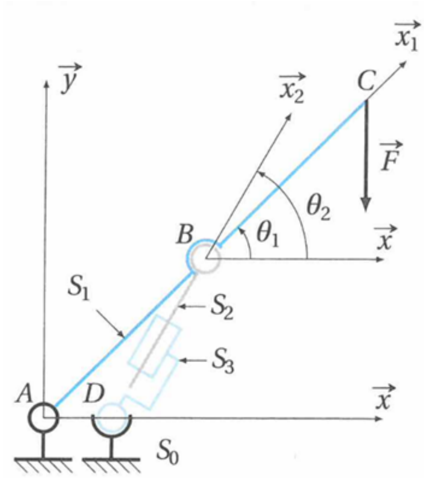


On note :

- S_0 le bâti
- S_1 le bras de grue
- S_2 la tige du vérin
- S_3 le corps du vérin

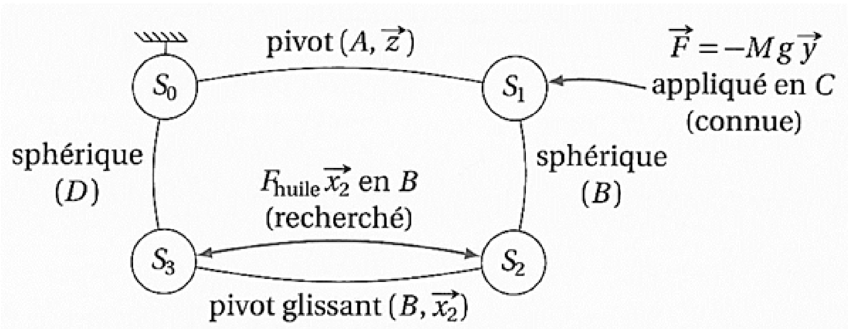
On donne :

- $\theta_1 = 45°$
- $\theta_2 = 60°$
- $AD = a = 2,1m$
- $AB = b = 7,5m$
- $AC = c = 15,6m$
- $DB = \lambda$



Question 2: Réaliser le graphe d'analyse du système. Préciser les actions mécaniques connues et celles recherchées.

Réponse 2:



Question 3: Vérifier s'il le problème ne peut pas être simplifié ; c'est à dire si des solides, ou ensemble de solide, ne sont soumis qu'à deux glisseurs.

Réponse 3: On remarque que l'ensemble $\{2+3\}$ n'est soumis qu'à deux glisseurs.
On suppose le référentiel galiléen et on isole l'ensemble $\{2+3\}$.
Le bilan des actions mécaniques extérieures donne :

$$\{\mathcal{T}_{0\to3}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{0\to3}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{1\to2}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

D'après le PFS, ces forces sont de même norme, de même direction et de sens opposés. De plus, la direction est la droite passant par les deux points d'application des forces. Soit $\boxed{\overrightarrow{F_{0\to3}} = -\overrightarrow{F_{1\to2}} = F_{12}\vec{x_2}}$.

Question 4: Déterminer l'action mécanique recherchée en fonction des données et conclure quant à la fonction FS1 du cahier des charges.

Réponse 4: On isole 1, le BAME donne :

$$\{\mathcal{T}_{2\rightarrow 1}\} = \left\{\begin{array}{c} -F_{12}\vec{x_2} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_B \ ; \ \{\mathcal{T}_{charge\rightarrow 1}\} = \left\{\begin{array}{c} -Mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_C \ ; \ \{\mathcal{T}_{0\rightarrow 1}\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_{B,(-,-,\vec{z})}$$

On utilise le théorème du moment statique en A en projection sur $\vec{z}$ afin d'utiliser le moment nul dans le torseur des actions mécaniques de la liaison pivot :

$$\overrightarrow{M_{A,2\rightarrow 1}}.\vec{z} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}}).\vec{z} = (b\vec{x_1} \wedge -F_{12}\vec{x_2}).\vec{z} = -bF_{12}\sin(\theta_2-\theta_1)$$

$$\overrightarrow{M_{A,charge\rightarrow 1}}.\vec{z} = (\overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}).\vec{z} = (c\vec{x_1} \wedge -Mg\vec{y}).\vec{z} = -cMg\cos(\theta_1)$$

On a donc $-bF_{12}\sin(\theta_2-\theta_1) - cMg\cos(\theta_1) = 0$
Soit

$$F_{12} = -\frac{cMg\cos(\theta_1)}{b\sin(\theta_2-\theta_1)}$$

Il reste maintenant à trouver une relation entre F_{12} et $F_{huile\rightarrow S_2}$. Pour cela on isole 2 et on applique le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{x_2}$:

$$F_{12} + F_{huile\rightarrow S_2} = 0$$

On en déduit $\boxed{F_{huile\rightarrow S_2} = \dfrac{cMg\cos(\theta_1)}{b\sin(\theta_2-\theta_1)}}$

L'application numérique donne $\underline{F_{huile\rightarrow S_2} = 5,57.10^5 N}$, le critère de masse de la charge de la fonction FS1, dans cette configuration géométrique, est validé.