

# Modélisation locale des actions mécaniques

Une grande partie des actions mécanique peuvent facilement être modélisée par une force ponctuelle s'appliquant en un point connu. Cependant lorsque la force est engendrée par une pression sur une surface elle ne peut pas directement être modélisée par une force ponctuelle. Un passage par la modélisation locale est alors nécessaire.

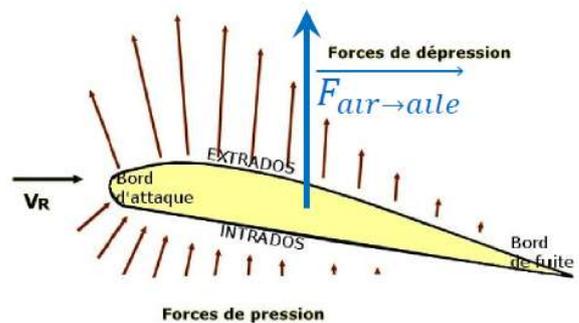
## 1. Modélisation des actions mécanique de contact

### 1.1. Passage du point de vue local au point de vue global

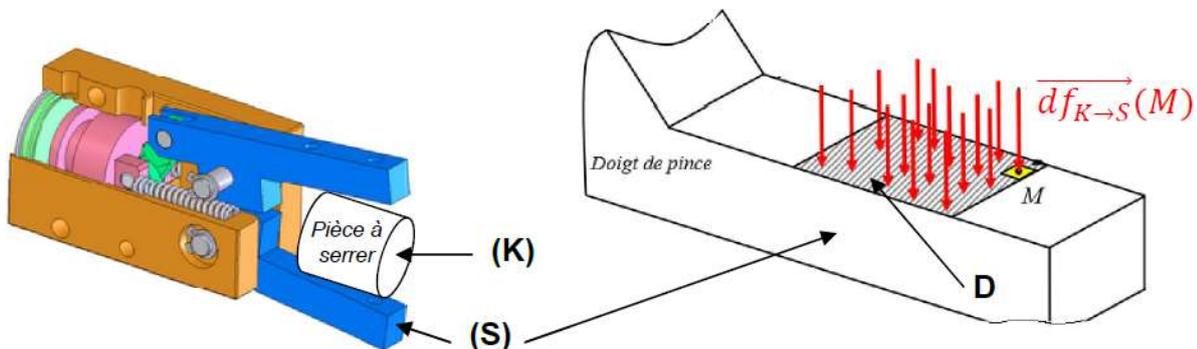
**Point de vue global :** Il s'agit du point de vue que nous avons supposé jusqu'à présent. Le torseur des actions mécaniques de (K) sur (S) noté  $\{\mathcal{T}_{K \rightarrow S}\}$  résulte de l'ensemble des actions mécaniques des forces élémentaires linéiques, surfaciques ou volumiques de (K) sur (S).

*Exemple : action de l'air sur l'aile d'un avion*

Les forces élémentaires (ou **locales**) de la pression de l'air (petites flèches) sur l'aile d'avion créent une force globale, appelée portance, qui permet de soulever l'avion. On peut s'apercevoir que sous l'aile, une pression est créée, alors qu'il s'agit d'une dépression au-dessus.



**Point de vue local :** Soit une action mécanique de (K) sur (S) décrite au niveau local par un ensemble continu de forces élémentaires, sur un domaine D linéique, surfacique ou volumique.



Soit M un point courant de D où s'exerce une force et A un point où l'on souhaite exprimer le torseur de l'action mécanique de (K) sur (S).

Chaque force élémentaire est modélisée par un pointeur  $(M, \overrightarrow{df_{K \rightarrow S}})$ .

Le torseur élémentaire de l'action mécanique de (K) sur (S), s'exprime en M par un glisseur :

$$\{\mathcal{T}_{K \rightarrow S}^{elem}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{df_{K \rightarrow S}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

Soit en A :

$$\{\mathcal{T}_{K \rightarrow S}^{elem}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{df_{K \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{df_{K \rightarrow S}} \end{array} \right\}_A$$

### Passage du local vers le global :

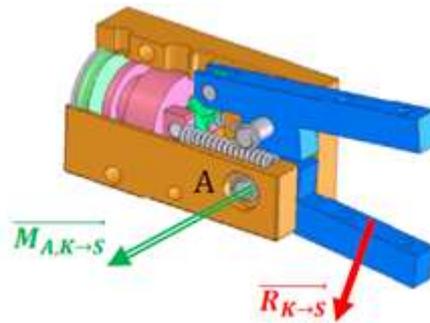
Pour passer du modèle local au modèle global, il faut « *sommer* » les actions élémentaires, pour tous les points  $M$  de la surface  $D$ .

Le torseur global de l'action mécanique de  $(K)$  sur  $(S)$  s'exprime alors par :

$$\{\mathcal{T}_{K \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{K \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{A, K \rightarrow S}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int \overrightarrow{df_{K \rightarrow S}} \\ \int_{\forall M \in D} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{df_{K \rightarrow S}} \end{array} \right\}_A$$

### Remarques :

- **Important** : Le torseur global ne peut être déterminé qu'en un point fixe du solide.
- Au point de vue globale, l'exemple de la pince Schrader donne



- Afin de déterminer  $\overrightarrow{R_{K \rightarrow S}}$  et  $\overrightarrow{M_{A, K \rightarrow S}}$ , il reste à exprimer ce que vaut  $\overrightarrow{df_{K \rightarrow S}}$ .

#### 1.1.1. Détermination des forces élémentaires

Les forces élémentaires usuellement notées  $df$  résulte du produit d'une charge linéique, surfacique ou volumique avec un élément d'intégration, respectivement linéaire, surfacique ou volumique.

Vous avez à votre disposition un mémo de quelques pages afin de déterminer les éléments d'intégration en fonction du système de coordonnées et de la dimension de la charge (linéaire, surfacique ou volumique).

#### 1.1.2. Application pour des solides à une dimension

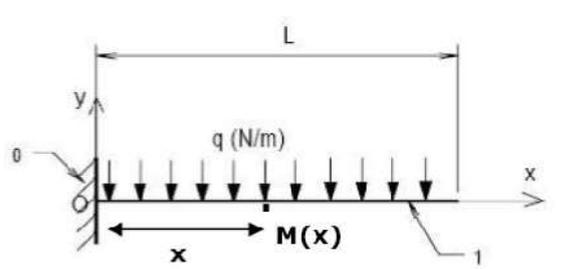
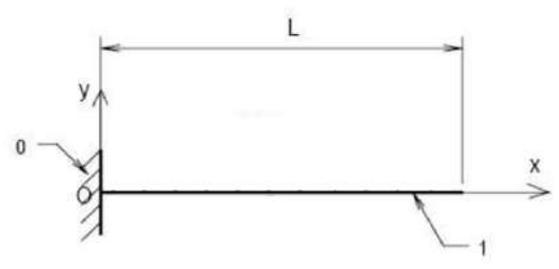
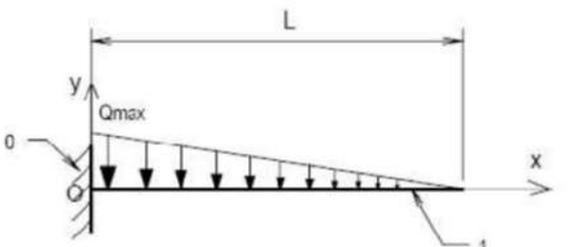
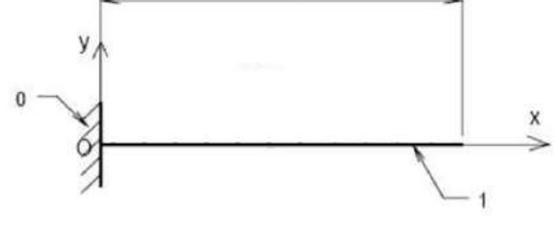
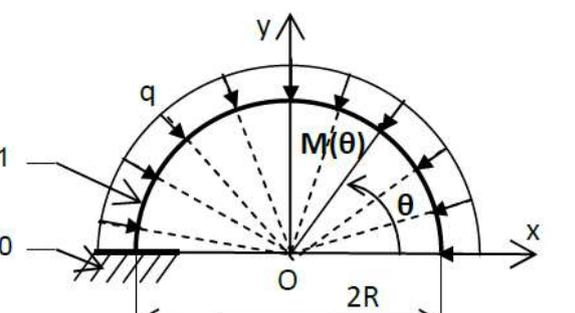
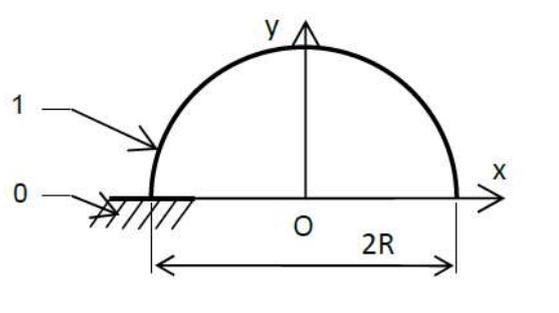
On considère des poutres soumises à des charges linéiques. On note **1** la poutre et **2** la charge.

Pour chacun des cas suivants :

**Q.1.** Déterminer le torseur des actions mécaniques globales en  $O$  de la charge sur la poutre.

**Q.2.** Déterminer le centre de poussée  $P$ , c'est-à-dire le point tel que  $\overrightarrow{M_{P, 2 \rightarrow 1}} = \vec{0}$ .

**Q.3.** En déduire le modèle global équivalent en complétant le schéma de droite.

<p>Cas 1 : modèle local : <math>q(x) = q</math></p> 	<p>Modèle global</p> 
<p>Cas 2 : modèle local : <math>q(x) = a.x + b</math> (a et b sont à déterminer)</p> 	<p>Modèle global</p> 
<p>Cas 3 : modèle local : <math>q(x) = q</math></p> 	<p>Modèle global</p> 

**Cas 1 :**

1) Le torseur élémentaire est :  $\{T_{2 \rightarrow 1}^{elem}\} = \left\{ \begin{matrix} d\vec{f}_{2 \rightarrow 1} \\ d\vec{m}_{M,2 \rightarrow 1} \end{matrix} \right\}_M$  avec  $d\vec{m}_{M,2 \rightarrow 1} = \vec{0}$

Déterminons  $d\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$  :  $d\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = -q dx \vec{y}$

Déterminons  $d\vec{m}_{O,2 \rightarrow 1}$  afin d'exprimer le torseur élémentaire en O :

$$d\vec{m}_{O,2 \rightarrow 1} = d\vec{m}_{M,2 \rightarrow 1} + \vec{OM} \wedge d\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0} + x \vec{x} \wedge -q dx \vec{y} = -qx dx \vec{z}$$

Le torseur global s'écrit :  $\{T_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{O,2 \rightarrow 1} \end{matrix} \right\}_O$ , avec :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \int d\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \int_0^L -q dx \vec{y} = -q \vec{y} \int_0^L dx = -qL \vec{y}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 1}} &= \int d\overrightarrow{m_{O,2 \rightarrow 1}} = \int_0^L -qx \, dx \, \vec{z} = -q \vec{z} \int_0^L x \, dx = -q \vec{z} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^L = -\frac{qL^2}{2} \vec{z} \\ \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} &= \begin{pmatrix} -qL \vec{y} \\ -\frac{qL^2}{2} \vec{z} \end{pmatrix}_O \end{aligned}$$

2) On cherche  $P$  de coordonné  $x_p$  tel que  $\overrightarrow{M_{P,2 \rightarrow 1}} = \vec{0}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{P,2 \rightarrow 1}} = \vec{0} &= \overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = -\frac{qL^2}{2} \vec{z} + (-x_p \vec{x}) \wedge -qL \vec{y} \\ \Rightarrow 0 &= -\frac{qL^2}{2} + x_p qL \Rightarrow x_p = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

3) Ainsi le modèle local est équivalent à une force s'appliquant au point  $P$  avec  $x_p = \frac{L}{2}$  :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{pmatrix} -qL \vec{y} \\ \vec{0} \end{pmatrix}_P$$

### Cas 2 :

1) Le torseur élémentaire est :  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}^{elem}\} = \left\{ \frac{d\overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}}}{d\overrightarrow{m_{M,2 \rightarrow 1}}} \right\}_M$  avec  $d\overrightarrow{m_{M,2 \rightarrow 1}} = \vec{0}$

Déterminons  $d\overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}}$  :  $\begin{cases} Q(0) = Q_{max} \\ Q(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow q(x) = -\frac{Q_{max}}{L}x + Q_{max}$

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}^{elem}\} = \begin{pmatrix} -q(x) \, dx \, \vec{y} \\ \vec{0} \end{pmatrix}_M$$

Déterminons  $d\overrightarrow{m_{O,2 \rightarrow 1}}$  afin d'exprimer le torseur élémentaire en  $O$  :

$$d\overrightarrow{m_{O,2 \rightarrow 1}} = d\overrightarrow{m_{M,2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}} = \vec{0} + x \vec{x} \wedge -q(x) \, dx \, \vec{y} = -q(x)x \, dx \, \vec{z}$$

Le torseur global s'écrit :  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}}}{\overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 1}}} \right\}_O$ , avec :

$$\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = \int d\overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}} = \int_0^L -q(x) \, dx \, \vec{y} = -\vec{y} \int_0^L q(x) \, dx = -\left[ -\frac{Q_{max}x^2}{2L} + Q_{max}x \right]_0^L \vec{y} = -\frac{Q_{max}L}{2} \vec{y}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 1}} &= \int d\overrightarrow{m_{O,2 \rightarrow 1}} = \int_0^L -q(x) \, dx \, \vec{z} = -\left[ -\frac{Q_{max}x^3}{3L} + \frac{Q_{max}x^2}{2} \right]_0^L \vec{z} = -\left[ -\frac{Q_{max}L^2}{3} + \frac{Q_{max}L^2}{2} \right] \vec{z} \\ &= -\frac{Q_{max}L^2}{6} \vec{z} \end{aligned}$$

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{pmatrix} -\frac{Q_{max}L}{2} \vec{y} \\ -\frac{Q_{max}L^2}{6} \vec{z} \end{pmatrix}_O$$

2) On cherche  $P$  de coordonné  $x_p$  tel que  $\overrightarrow{M_{P,2 \rightarrow 1}} = \vec{0}$  :

$$\overrightarrow{M_{P,2 \rightarrow 1}} = \vec{0} = \overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = -\frac{Q_{max}L^2}{6} \vec{z} + (-x_p \vec{x}) \wedge -\frac{Q_{max}L}{2} \vec{y}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{Q_{max}L^2}{6}\ddot{z} + x_p \frac{Q_{max}L}{2}$$

$$\Rightarrow x_p = \frac{L}{3}$$

3) Ainsi le modèle local est équivalent à une force s'appliquant au point  $P$  avec  $x_p = \frac{L}{3}$  :

$$\{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{Q_{max}L}{2}\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

### Cas 3 :

1) Le torseur élémentaire est :  $\{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}^{elem}\} = \left\{ \begin{array}{c} d\vec{f}_{2 \rightarrow 1} \\ d\vec{m}_{M,2 \rightarrow 1} \end{array} \right\}_M$  avec  $d\vec{m}_{M,2 \rightarrow 1} = \vec{0}$

Déterminons  $d\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$  :  $d\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = -q dl \vec{e}_r = -qRd\theta \vec{e}_r$

$$\{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}^{elem}\} = \left\{ \begin{array}{c} -qRd\theta \vec{e}_r \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

Déterminons  $d\vec{m}_{O,2 \rightarrow 1}$  afin d'exprimer le torseur élémentaire en  $O$  :

$$d\vec{m}_{O,2 \rightarrow 1} = d\vec{m}_{M,2 \rightarrow 1} + \vec{OM} \wedge d\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0} + r \vec{e}_r \wedge -qRd\theta \vec{e}_r = \vec{0}$$

Le torseur global s'écrit :  $\{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$ , avec :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \int d\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = -qR \int d\theta \vec{e}_r = -qR \int d\theta (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y})$$

$$= -qR \left( \int_0^\pi \cos \theta d\theta \vec{x} + \int_0^\pi \sin \theta d\theta \vec{y} \right) = -qR [-\cos \theta]_0^\pi \vec{y} = -2qR\vec{y}$$

$$\{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} -2qR\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

2) On cherche  $P$  de coordonné  $x_p$  tel que  $\vec{M}_{P,2 \rightarrow 1} = \vec{0}$  :

$$\vec{M}_{P,2 \rightarrow 1} = \vec{0} = \vec{M}_{O,2 \rightarrow 1}$$

3) Ainsi le modèle local est équivalent à une force s'appliquant au point  $O$  :

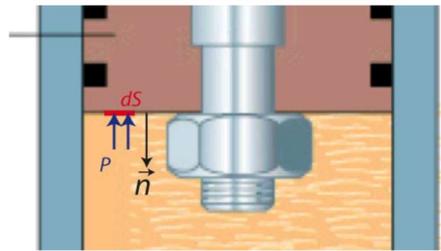
$$\{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} -2qR\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

### 1.2. Cas de l'action d'un fluide sur un solide

Prenons l'exemple de l'action de la pression  $P$  d'un fluide (huile ou air) sur le piston d'un vérin. On suppose cette pression constante.

Localement en un point  $M$  de surface du piston, en supposant que le fluide est parfait, le fluide applique une force élémentaire sur le piston :

$$\overrightarrow{df_{fluide \rightarrow piston}} = -p \cdot dS \cdot \vec{n}$$



Cette force élémentaire est logiquement orientée en sens inverse de la normale, d'où le signe « - ».

L'action mécanique exercée par le fluide sur le piston est répartie sur toute la surface utile de ce dernier.

Le torseur de l'action mécanique globale du fluide sur le piston s'écrit :

$$\{T_{fluide \rightarrow piston}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{fluide \rightarrow piston}} \\ \left( M_{A, fluide \rightarrow piston} \right)_A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \int_{\forall M \in S} p \cdot dS \cdot \vec{n} \\ - \int_{\forall M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge p \cdot dS \cdot \vec{n} \end{array} \right\}_A$$

#### Calcul de la résultante :

##### Hypothèses :

- la pesanteur  $\vec{g}$  est constante en tout point.
- la masse volumique  $\rho$  est constante en tout point.

La résultante globale est :

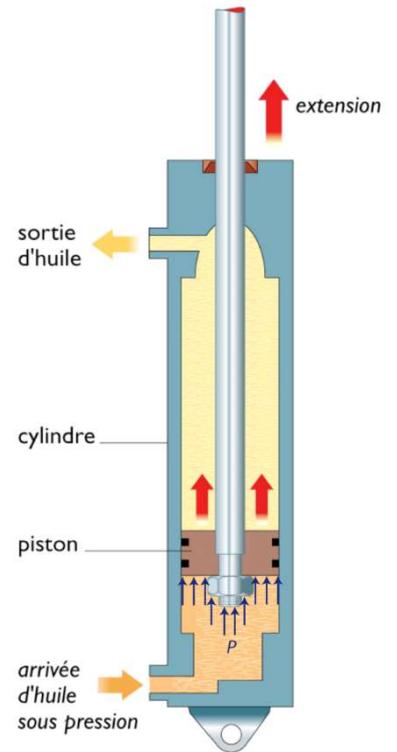
$$\overrightarrow{R_{fluide \rightarrow piston}} = - \int_{\forall M \in S} p \cdot dS \cdot \vec{n}$$

Comme  $p$  et  $\vec{n}$  sont constants sur la surface, on peut les sortir de l'intégrale :

$$\overrightarrow{R_{fluide \rightarrow piston}} = -p \left( \int_{\forall M \in S} dS \right) \vec{n}$$

Soit

$$\overrightarrow{R_{fluide \rightarrow piston}} = -p \cdot S \cdot \vec{n}$$



**vérin hydraulique à double effet**  
(mouvement d'extension)

**Calcul du moment en A :**

$$\overrightarrow{M_{A, fluide \rightarrow piston}} = - \int_{\forall M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge p \cdot dS \cdot \vec{n}$$

Des considérations de symétrie amènent logiquement (et cela se vérifie aussi par le calcul, les moments se compensant deux à deux) à voir que ce moment est nul s'il est calculé en un point de l'axe du piston.

Pour tout point  $P$  de l'axe de symétrie du piston on a donc :

$$\overrightarrow{M_{P, fluide \rightarrow piston}} = \vec{0}$$

**Conclusion**

Le torseur de l'action d'un fluide à la pression  $P$  sur un piston s'écrit donc

$$\{\mathcal{J}_{fluide \rightarrow piston}\} = \left\{ \begin{array}{l} -p \cdot S \cdot \vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall M \in \text{axe du piston}}$$

Où

- $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normale au plan
- $S$  représente la surface utile du piston

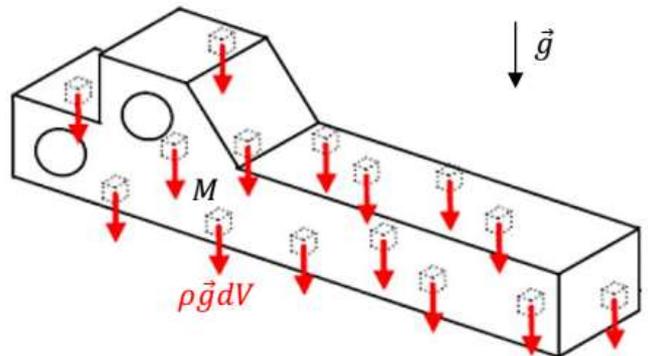
**Attention aux unités :**  $1 Pa = 1 N/m^2$  et  $1 bar = 10^5 Pa$ .

## 2. Modélisation des actions mécanique à distance

Les actions mécaniques à distance peuvent être de plusieurs types : actions massiques (s'exerçant sur tout élément matériel), actions électriques (s'exerçant sur tous les porteurs de charge) et actions magnétiques.

Prenons le cas de l'action de la pesanteur sur un solide ( $S$ ) de masse  $m$ .

Tout corps matériel crée autour de lui un champ d'attraction proportionnel à sa masse appelé « champ de pesanteur ». Sur Terre, seul le champ d'attraction créé par la Terre elle-même est significatif. Il en résulte que toute matière plongée dans un champ de pesanteur est soumise à une action « attractive » dont l'intensité est proportionnelle à la masse et à l'intensité du champ de pesanteur (la norme de  $\vec{g}$ ). L'action de la pesanteur s'applique à chaque particule de matière.



On représente l'effet de la pesanteur au niveau local par le pointeur  $(M, \vec{df})$  s'exerçant sur un petit élément de volume  $dV$ , situé au point  $M$ . On appelle  $\rho$  la masse volumique (en  $kg \cdot m^{-3}$ ) du matériau considéré.



On a alors :

$$\overrightarrow{df} = \vec{q} \cdot dV = \rho \vec{g} \cdot dV$$

Le torseur de l'action de la pesanteur sur ( $S$ ) en un point  $A$  s'écrit alors :

$$\{\mathcal{T}_{pesanteur \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{pesanteur \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{A,pesanteur \rightarrow S}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\forall M \in D} \rho \vec{g} \cdot dV \\ \int_{\forall M \in D} \overrightarrow{AM} \wedge \rho \vec{g} \cdot dV \end{array} \right\}_A$$

### Calcul de la résultante :

#### Hypothèses :

- la pesanteur  $\vec{g}$  est constante en tout point de  $S$ .
- la masse volumique  $\rho$  est constante en tout point de  $S$ .

La résultante globale est donc :

$$\overrightarrow{R_{pesanteur \rightarrow S}} = \int_{\forall M \in S} \rho \vec{g} \cdot dV = \rho \vec{g} \int_{\forall M \in S} dV = \rho \vec{g} V = m \vec{g}$$

Cette résultante s'appelle le poids et est généralement notée  $\vec{P}$ .

#### Calcul du moment en $A$ :

$$\overrightarrow{M_{A,pesanteur \rightarrow S}} = \int_{\forall M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \rho \vec{g} \cdot dV = \left( \int_{\forall M \in S} \overrightarrow{AM} \rho dV \right) \wedge \vec{g}$$

Or le centre de gravité  $G$  est défini par :

$$\int_{\forall M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \vec{0} = \int_{\forall M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot \rho dV = \vec{0}$$

Ainsi  $\overrightarrow{M_{G,pesanteur \rightarrow S}} = \vec{0}$ .

**Conclusion :** Sous les hypothèses de pesanteur et masse volumique constantes, le torseur de l'action de la pesanteur sur un solide ( $S$ ) s'écrit donc, en son centre de gravité  $G$  :

$$\{\mathcal{T}_{pesanteur \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

## 2.1. Détermination du centre de gravité d'un solide

### 2.1.1. Définitions

Le **centre de gravité** du solide  $S$  est le point pour lequel l'action mécanique de la pesanteur se résume à un glisseur :

$$\int_{\forall M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \vec{0}$$

Le centre d'inertie d'un solide  $S$  est le point  $G$  tel que, pour un point  $O$  quelconque et  $M \in S$  :

$$m \cdot \vec{OG} = \int_{\forall M \in S} \vec{OM} \cdot \rho \cdot dV = \int_{\forall M \in S} \vec{OM} \cdot dm$$

Remarques importantes :

- Si le champ de pesanteur est uniforme, **centre d'inertie et de gravité sont confondus, ce qui sera toujours le cas en SI.**
- Si le solide  $S$  possède un **élément de symétrie** (plan, axe ou centre), le **centre de gravité**, ou centre d'inertie, **appartiendra forcément à cet élément de symétrie.**
- La définition du centre d'inertie revient à :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \int_{\forall M \in S} \vec{OM} dm$$

- Si la masse volumique du solide est constante (isotrope), on peut simplifier l'expression de la manière suivante :

Si le solide a deux dimensions  
(1 dimension négligeable devant les 2 autres)

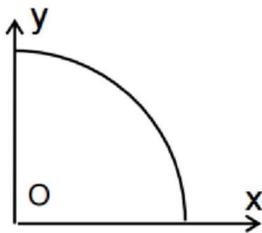
$$\vec{OG} = \frac{1}{S} \int_{\forall M \in S} \vec{OM} dS$$

Si le solide est en 3 dimensions

$$\vec{OG} = \frac{1}{V} \int_{\forall M \in V} \vec{OM} dV$$

### 2.1.2. Application pour un solide

**Q.4.** Déterminer la position du centre de gravité d'un quart de disque homogène de rayon  $R$  et d'épaisseur  $e$ , négligeable devant  $R$ .



On cherche la position du centre de gravité  $\vec{OG}$  dans le cas d'une pièce qui peut être modélisée en 2D (l'épaisseur étant négligeable).

$$\vec{OG} = \frac{1}{S} \int_{\forall M \in S} \vec{OM} dS \text{ avec } \begin{cases} S = \frac{\pi R^2}{4} \\ \vec{OM} = r \vec{e}_r \\ dS = r dr d\theta \end{cases}$$

$$\vec{OG} = \frac{4}{\pi R^2} \iint r^2 dr d\theta \vec{e}_r$$

$\vec{e}_r$  n'est pas un vecteur constant, il faut donc l'exprimer dans la base fixe  $(\vec{x}, \vec{y})$

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{4}{\pi R^2} \iint r^2 dr d\theta (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \iint r^2 dr d\theta (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) = \frac{4}{\pi R^2} \left( \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{x} + \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{y} \right) \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \left( \frac{R^3}{3} (1 - 0) \vec{x} + \frac{R^3}{3} (0 + 1) \vec{y} \right) = \frac{4R}{3\pi} (\vec{x} + \vec{y}) \end{aligned}$$

**2.1.3. Centre de gravité pour un ensemble de solide**

Soit un ensemble  $S$  de  $n$  solides de masse totale  $m$ , tel que  $S = \sum_{k=1}^n S_k$ .  
Soit  $G$  le centre de gravité de cet ensemble.

On a :

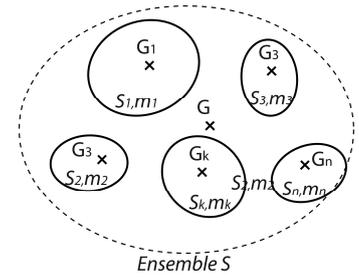
$$m\overrightarrow{OG} = \int_{\forall M \in S} \overrightarrow{OM} dm = \sum_{k=1}^n \int_{\forall M \in S_k} \overrightarrow{OM} dm$$

Or

$$\int_{\forall M \in S_k} \overrightarrow{OM} dm = m_k \overrightarrow{OG_k}$$

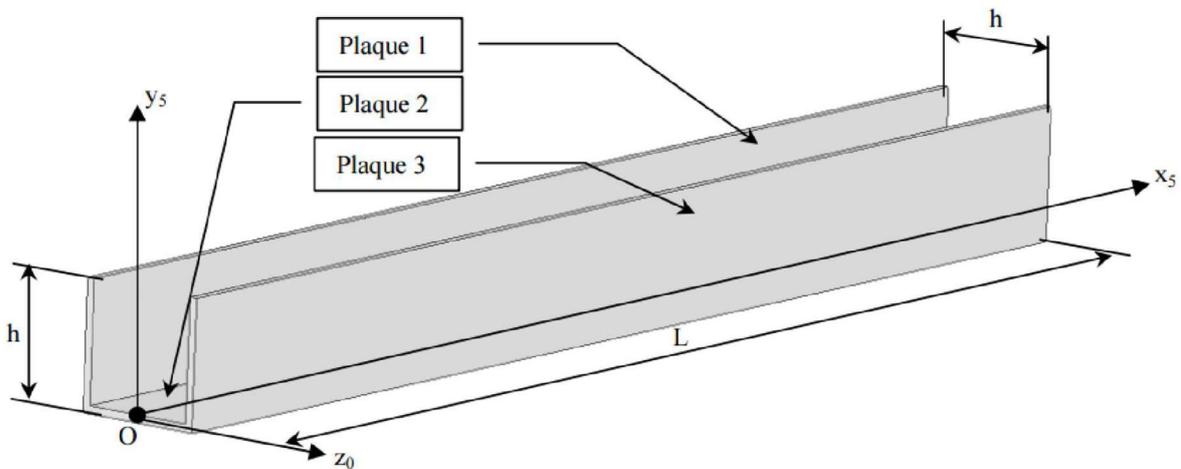
Ainsi, pour déterminer la position du centre de gravité  $G$  d'un ensemble de solides :

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_{k=1}^n m_k \overrightarrow{OG_k}$$



**2.1.4. Application pour un ensemble de solide**

**Q.5.** Déterminer la position du centre de gravité du solide suivant constitué de trois plaques rectangulaires homogènes d'épaisseur  $e$ , de longueur  $L$  et de largeur  $h$ . Chaque plaque a une masse notée  $m$ . L'épaisseur  $e$  est négligeable devant les autres grandeurs.



A partir des symétries de chaque plaque, on peut déduire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OG_1} = \frac{L}{2}\vec{x} + \frac{h}{2}\vec{y} - \frac{h}{2}\vec{z} \\ \overrightarrow{OG_2} = \frac{L}{2}\vec{x} \\ \overrightarrow{OG_3} = \frac{L}{2}\vec{x} + \frac{h}{2}\vec{y} + \frac{h}{2}\vec{z} \end{cases}$$

D'où :  $3m\overrightarrow{OG} = \sum_{k=1}^3 m\overrightarrow{OG_k} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_3}) \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{L}{2}\vec{x} + \frac{h}{3}\vec{y}$