

Modélisation du contact avec frottement

1. Liaison parfaite

1.1. Rappel - Modélisation cinématique des liaisons

Pour caractériser les mouvements relatifs entre deux solides (1) et (2) constituant une liaison, on utilise l'outil torseur cinématique. Il prend la forme générale :

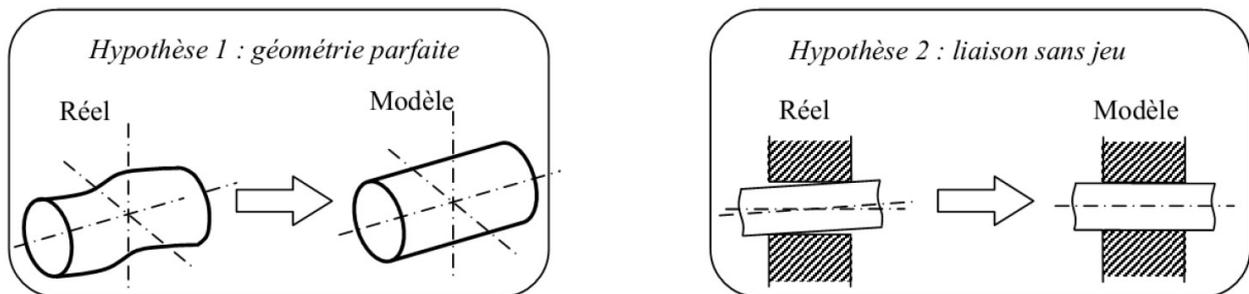
$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1} = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{V}_{A,2/1} = V_x \vec{x} + V_y \vec{y} + V_z \vec{z} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array} \right\}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On appelle N_C le nombre de degrés de liberté d'une liaison. Il correspond au nombre de paramètres de position relatifs indépendants.

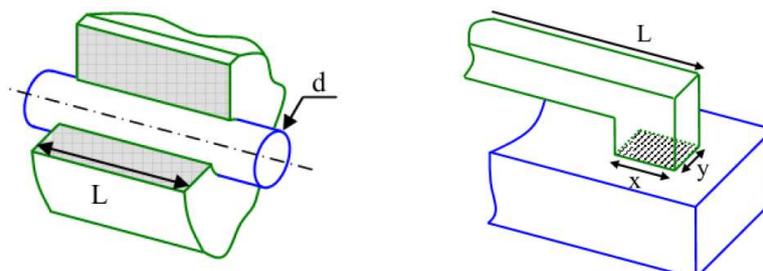
$$0 \leq N_C \leq 5$$

$N_C = 0$ correspond à la liaison encastrement et l'existence même d'une liaison impose $N_C \neq 6$ puisqu'un solide sans liaison possède 6 degrés de liberté.

Deux hypothèses sont nécessaires à la mise en place du modèle cinématique d'une **liaison parfaite** :



Conséquences sur la modélisation du contact cylindre/cylindre (gauche) et plan/plan (droite)



- Suivant le jeu, le contact cylindre/cylindre et donc le modèle peut changer :
 - jeu faible \Rightarrow Liaison pivot glissant
 - jeu important \Rightarrow Liaison linéaire annulaire
- Suivant les dimensions x et y de la surface plane (inclue dans une liaison de plus grande longueur L), le modèle à retenir peut changer :
 - $x \approx y \Rightarrow$ Liaison appui-plan
 - $x \approx 0,1y$ ou $y \approx 0,1x \Rightarrow$ Liaison linéaire rectiligne
 - x et $y \ll L \Rightarrow$ Liaison ponctuelle

1.2. Modélisation statique des liaisons

Pour caractériser l'action mécanique transmissible entre deux solides (1) et (2) constituant une liaison, on utilise l'outil torseur d'action mécanique transmissible. Il prend la forme générale :

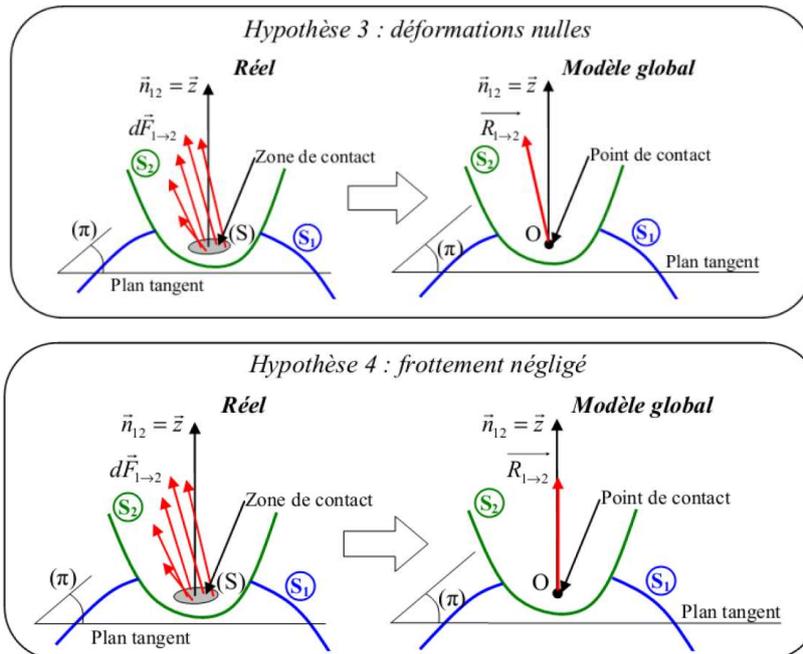
$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y} + Z_{12} \vec{z} \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} = L_{12} \vec{x} + M_{12} \vec{y} + N_{12} \vec{z} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{ll} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On appelle N_S le nombre d'inconnues statiques d'une liaison, il correspond au nombre de composantes non nulles et indépendantes.

$$1 \leq N_S \leq 6$$

$N_S = 6$ correspond à la liaison encastrement et l'existence même d'une liaison impose $N_S \neq 0$ puisqu'un solide sans liaison possède au minimum une inconnue statique.

Deux hypothèses fondamentales supplémentaires sont nécessaires à la mise en place du modèle d'action mécanique transmissible :



1.3. Liaisons parfaites

Lorsque les hypothèses 1, 2, 3 et 4 sont vérifiées, on dit que la **liaison est parfaite** :

- Géométrie parfaite
- Liaison sans jeu
- Déformation nulle
- Frottement négligé

Remarque : Il est essentiel de garder en mémoire qu'une **liaison réelle n'est jamais parfaite** puisqu'il s'agit d'un modèle ! En réalité il ne faut pas dire « cette liaison est une liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x}) » mais plutôt « cette liaison peut être raisonnablement modélisée par une liaison pivot glissant parfaite d'axe (O, \vec{x}) compte tenu de l'objectif fixé ».

2. Frottements

Quand les liaisons ne sont pas parfaites, il peut exister des frottements. Ceux-ci se modélisent par des actions mécaniques qui s'opposent au mouvement ou à la mise en mouvement.

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel.

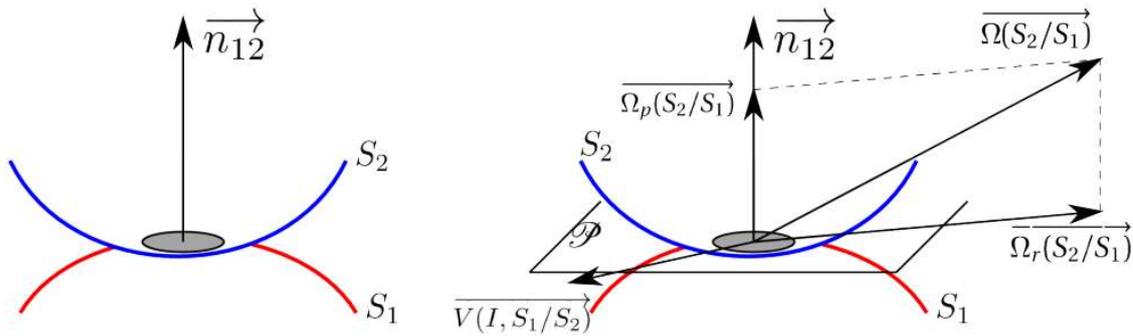
Définissons alors I le point de contact entre les deux solides et \vec{n}_{12} la normale de contact. On appelle P le plan normal à \vec{n}_{12} en I . Il est tangent à S_1 et S_2 .

Le torseur cinématique peut alors s'écrire :

$$\{v_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{S_2/S_1} = \vec{\Omega}_{pS_2/S_1} + \vec{\Omega}_{rS_2/S_1} \\ \vec{V}_{I \in S_2/S_1} \end{array} \right\}_I$$

Avec

- $\vec{\Omega}_{pS_2/S_1}$ le vecteur de pivotement, il s'agit de la vitesse de rotation autour de la normale \vec{n}_{12} .
- $\vec{\Omega}_{rS_2/S_1}$ le vecteur de roulement, il s'agit de la vitesse de rotation autour d'un axe parallèle au plan P .
- $\vec{V}_{I \in S_2/S_1}$ le vecteur vitesse de glissement (elle appartient au plan P).



On modélise des forces de frottements pour ces trois mouvements.

2.1. Translation et frottement sec (loi de Coulomb)

En translation, le frottement est modélisé par une force qui s'oppose au mouvement, ou à la mise en mouvement. Cette force appartient au plan P . Le torseur des actions mécaniques transmissibles devient :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = N_{12} \vec{n}_{12} + T_{12} \vec{t}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I \text{ avec } \vec{n}_{12} \cdot \vec{t}_{12} = 0$$

2.1.1. Frottement avec glissement

Le glissement signifie que $\vec{V}_{I \in 2/1} \neq \vec{0}$ ("dynamique").

Direction et sens

La composante tangentielle $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est opposée à la vitesse de glissement $\vec{V}_{I, S_2/S_1}$. La relation entre le vecteur unitaire de la force de frottement et la vitesse de glissement est :

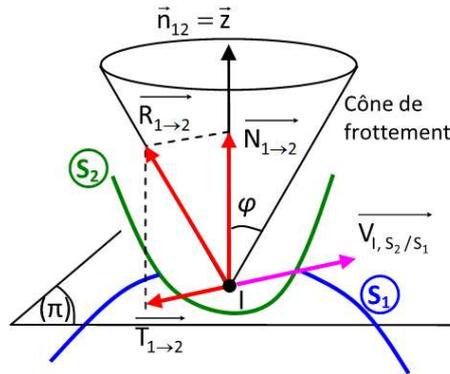
$$\vec{t}_{12} = \frac{-\vec{V}_{I, S_2/S_1}}{\|\vec{V}_{I, S_2/S_1}\|}$$

Norme

On définit un **coefficient de frottement** f et la **loi de Coulomb** donne :

$$\mathbf{T}_{12} = f \mathbf{N}_{12}$$

La résultante $\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$ est alors inclinée d'un angle φ par rapport à la normale $\overrightarrow{n_{12}}$, cet angle (ou demi-angle) de frottement est tel que $f = \tan \varphi$. On définit un cône de frottement à partir de cet angle :



La norme de la force de frottement T_{12} est telle que la résultante $\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$ est sur le cône de frottement.

2.1.2. Frottement sans glissement (adhérence)

Le non-glissement signifie que $\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \vec{0}$ (statique).

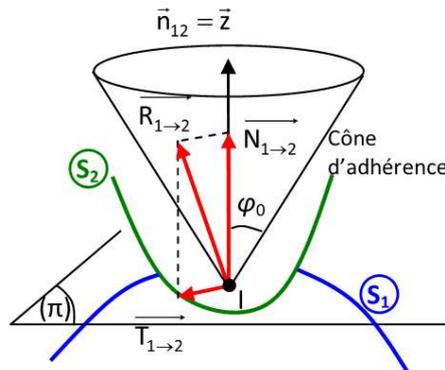
Direction et sens

La composante tangentielle $\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}$ est opposée à la résultante des forces qui tend à vouloir mettre en mouvement le solide 2.

Norme

La démarche est similaire à la différence que :

- Seule une étude statique permet de déterminer T_{12} .
- On définit un coefficient d'adhérence (coefficient dynamique) f_0 tel que $f_0 = \tan \varphi_0$ où φ_0 est le demi-angle au sommet du cône d'adhérence.
- $\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$ est toujours dans le cône d'adhérence, c'est-à-dire que T_{12} n'est pas exactement connu : $T_{12} \leq f_0 N_{12}$
- **A la limite du glissement $T_{12} = f_0 N_{12}$**



2.1.3. Remarques

Le coefficient de frottement f est en général inférieur au coefficient d'adhérence f_0 ($f_0 \geq f$).

Exemple du meuble

Pour déplacer un meuble en translation, il faut fournir un effort plus important pour le mettre en mouvement que pour garder ce mouvement. Cela est dû au fait que le coefficient d'adhérence est supérieur au coefficient de frottement.



Dans la pratique (les exercices, les concours...), **les deux coefficients** ayant des valeurs proches, ils **se confondent** et **seul le coefficient de frottement f est utilisé**.

Le coefficient de frottement f dépend de la nature des surfaces de contact (matériaux en contact, état de la surface de contact, présence ou non de lubrifiant, ...). Le facteur prépondérant concerne uniquement la nature des matériaux en contact.

Quelques exemples pour l'ordre de grandeur

Matériaux en contact	Coefficient de frottement
Acier sur acier	De 0,2 à 0,3
Acier sur bronze	De 0,12 à 0,2
Acier sur PTFE	De 0,02 à 0,08
Acier sur garniture de friction	De 0,25 à 0,4
Pneu neuf sur chaussée	De 0,3 à 0,6

Attention, le coefficient de frottement :

- **Est adimensionnel**
- **Ne dépend pas de l'effort normal** (en revanche l'effort tangentielle dépend de l'effort normal ET du coefficient de frottement).

2.2. Rotations et frottement

2.2.1. Frottement de pivotement

Lorsqu'un solide pivote par rapport à un autre solide, il apparait un couple de frottement qui tend à empêcher ce pivotement.

Ce couple est lié au frottement sur la surface de contact ; en effet chaque point de la surface de contact possède un effort tangentiel qui s'oppose au mouvement. Chacun de ces efforts génèrent un moment résistant, la résultante de ces moments est appelée couple de frottement.

Par analogie au glissement, on peut définir un coefficient de frottement de pivotement h :

$$C_{fr} = hN_{12}$$

Attention, h est de la dimension d'une longueur !

2.2.2. Résistance au roulement

Lorsqu'un solide roule sans glisser sur un autre solide avec une géométrie de contact non ponctuel (surface de contact), il apparait un couple résistant qui s'oppose à la rotation.

Les pressions au niveau de la surface de contact peuvent entraîner des déformations locales créant un "bourrelet" à l'avant. Ainsi le centre de poussée de la normale au contact est légèrement décalé d'une distance d , ce qui engendre un moment au centre de la rotation (couple résistant) :

$$C_{fr} = dN_{12}$$

Exemples de la pâte et du rouleau à pâtisserie et de la roue de vélo avec un pneu sous gonflé.

Attention, d est de la dimension d'une longueur !

2.3. Frottement visqueux

Les frottements visqueux apparaissent lorsqu'un solide se déplace dans un fluide. Comme tous les frottements, ils s'opposent au mouvement.

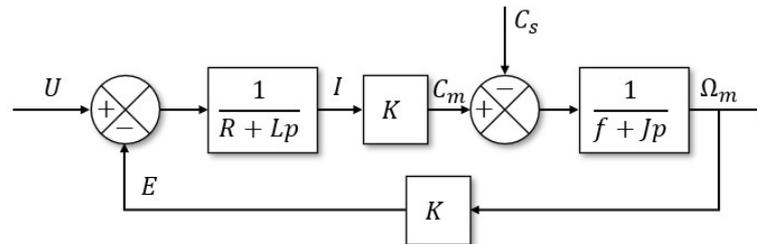
Les frottements visqueux sont dus à la **résistance interne du fluide** à l'écoulement, et **dépendent de la vitesse** relative. On peut noter, en fonction de la modélisation et pour une translation :

$$F_v = -kv \text{ ou } F_v = -kv^2$$

Avec v la vitesse relative du solide dans le fluide et k un coefficient qui dépend de la forme du solide, du fluide...

2.3.1. Cas très courant en SII

Le schéma bloc suivant modélise un moteur à courant continu (MCC).



Dans celui-ci, f est le coefficient de frottement visqueux (en N.m.s/rad) qui provoque un couple résistant tel que :

$$C_v = f\omega$$

Avec ω la vitesse de rotation en rad/s.