



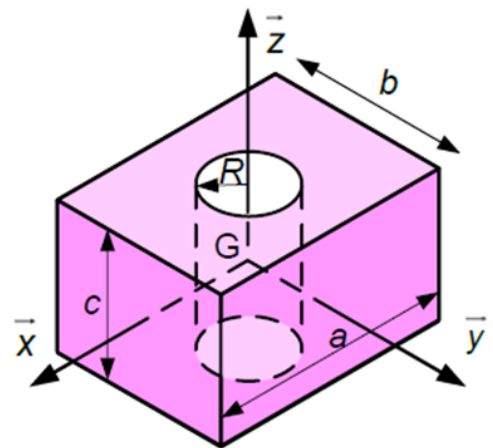
Correction TD09-01 complément Centre d'inertie

1. Parallélépipède percé

On considère le parallélépipède percé ci-contre. Les solides sont homogènes et la masse volumique est notée ρ . Le repère est $G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et G est au centre du parallélépipède.

Question 1: Déterminer la position du centre d'inertie G dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Réponse 1: D'après les plans de symétrie $((G, \vec{x}, \vec{z}), (G, \vec{x}, \vec{y}), (G, \vec{y}, \vec{z}))$ le centre de gravité est $G(0, 0, 0)$.



On considère le solide ci-contre. Le repère est identique avec O comme origine.

Question 2: Même question pour ce solide.

Réponse 2: On considère deux solides, un parallélépipède de centre O et un cylindre de centre G_2 avec $\overrightarrow{OG_2} = d\vec{x}$ (d'après les plans de symétrie $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et $(O, \vec{x}, \vec{z})$).

On en déduit que le centre d'inertie G appartient à la droite $(O, \vec{x})$.

La formule donne :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^2 m_i \overrightarrow{OG_i} = \frac{1}{\rho V} \sum_{i=1}^2 \rho V_i \overrightarrow{OG_i}$$

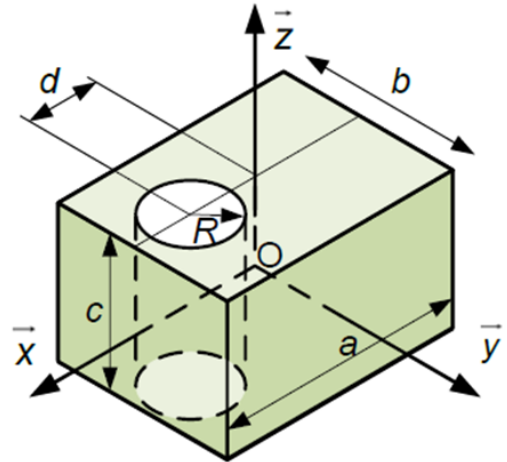
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^2 V_i \overrightarrow{OG_i}$$

Soit sur $\vec{x}$:

$$\overrightarrow{OG} \cdot \vec{x} = \frac{1}{V_1 - V_2} (-V_2 d)$$

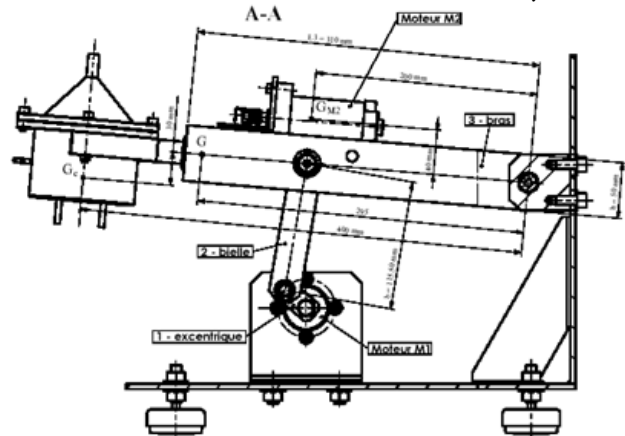
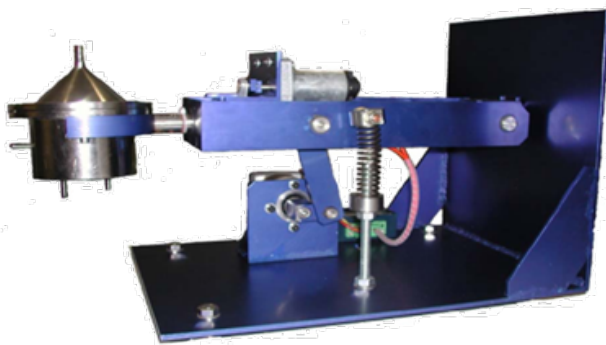
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} \cdot \vec{x} = \frac{-\pi R^2 c d}{abc - \pi R^2 c}$$

Enfin $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{-\pi R^2 d}{ab - \pi R^2} \vec{x}}.$

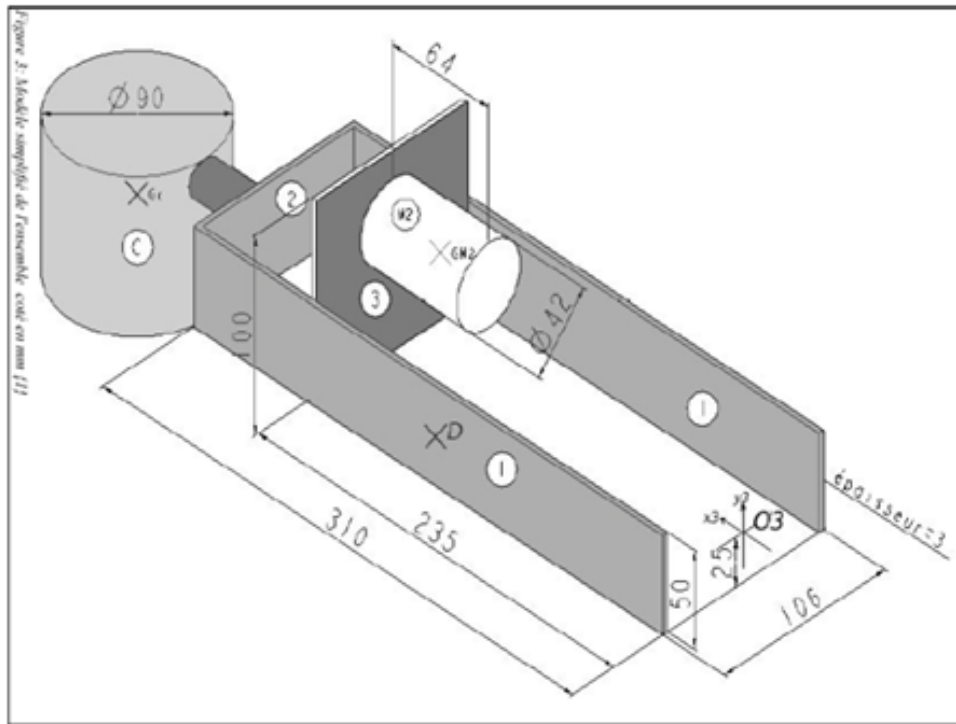


2. Agitateur de solution médicale

Le système est un agitateur utiliser en laboratoire médicale afin d'accélérer l'action d'enzymes.



On propose la modélisation (simplifiée) suivante de l'agitateur.



Le bras 3 constitué de :

- deux plaques 1 d'épaisseur $e = 3mm$, de longueur $L_1 = 310mm$, de hauteur $h_1 = 50mm$ et de masse $m_1 = 0,1kg$;
- une plaque 2 d'épaisseur $e = 3mm$, de largeur $L_2 = 100mm$, de hauteur $h_2 = 50mm$ et de masse $m_2 = 0,033kg$;
- une plaque 3 placée à la distance $d_3 = 235mm$, d'épaisseur $e = 3mm$, de longueur $L_3 = 100mm$, de hauteur $h_3 = 100mm$ et de masse $m_3 = 0,067kg$.

Le moto-réducteur **M2** est modélisé par un cylindre de hauteur $h_{M2} = 64mm$ de diamètre $D_{M2} = 42mm$, de masse $m_{M2} = 1kg$ et de centre de masse G_{M2} .

L'ensemble **C**={pince, enceinte} est modélisé par un cylindre de hauteur $h_C = 70mm$ de diamètre $D_C = 90mm$, de masse $m_C = 2,7kg$ et de centre de masse G_C .

La jonction entre 2 et C est négligeable.

Question 3: Déterminer le centre de gravité d'un cylindre de diamètre D et de hauteur h .

Réponse 3: Par symétrie le centre de gravité d'un cylindre se situe à mi-hauteur et sur l'axe de révolution.

On précise les vecteurs suivants (en mm) :

$$\overrightarrow{O_3 G_{M2}} = x_{M2} \vec{x}_3 + y_{M2} \vec{y}_3 = 200 \vec{x}_3 + 40 \vec{y}_3$$

$$\overrightarrow{O_3 G_C} = x_C \vec{x}_3 + y_C \vec{y}_3 = 400 \vec{x}_3 - 30 \vec{y}_3$$

Pour simplifier les calculs, considérons que tous les solides ont la même masse m (donc pas la même masse volumique).

Question 4: Déterminer le centre de gravité de l'agitateur.

Réponse 4: Plaques 1

De manière évidente (par symétrie), on a $\overrightarrow{O_3G_1} = \frac{L_1}{2}\vec{x}_3 \pm \frac{L_2 - e}{2}\vec{z}_3$ en fonction de la plaque.

Plaque 2

De même : $\overrightarrow{O_3G_2} = L_1\vec{x}_3$.

Plaque 3

De même : $\overrightarrow{O_3G_3} = d_3\vec{x}_3$.

La formule du centre d'inertie d'un ensemble de solide est :

$$m\overrightarrow{O_3G} = \sum_{i=1}^6 m_i \overrightarrow{O_3G_i}$$

$$\Leftrightarrow 5m\overrightarrow{O_3G} = m \sum_{i=1}^6 \overrightarrow{O_3G_i}$$

Soit sur $\vec{x}_3$:

$$\overrightarrow{O_3G} \cdot \vec{x}_3 = \frac{1}{5} \left(\frac{2L_1}{2} + L_1 + d_3 + x_{M2} + x_C \right) = \frac{1}{5} (620 + 235 + 200 + 400) = 291 \text{ mm}$$

Soit sur $\vec{y}_3$:

$$\overrightarrow{O_3G} \cdot \vec{y}_3 = \frac{1}{5} (x_{M2} + x_C) = 40 - 30 = 2 \text{ mm}$$

Soit sur $\vec{z}_3$:

$$\overrightarrow{O_3G} \cdot \vec{z}_3 = \frac{1}{5} \left(\frac{L_2 - e}{2} - \frac{L_2 - e}{2} \right) = 0 \text{ mm}$$

Enfin $\boxed{\overrightarrow{O_3G} = 291\vec{x}_3 + 2\vec{y}_3}$.