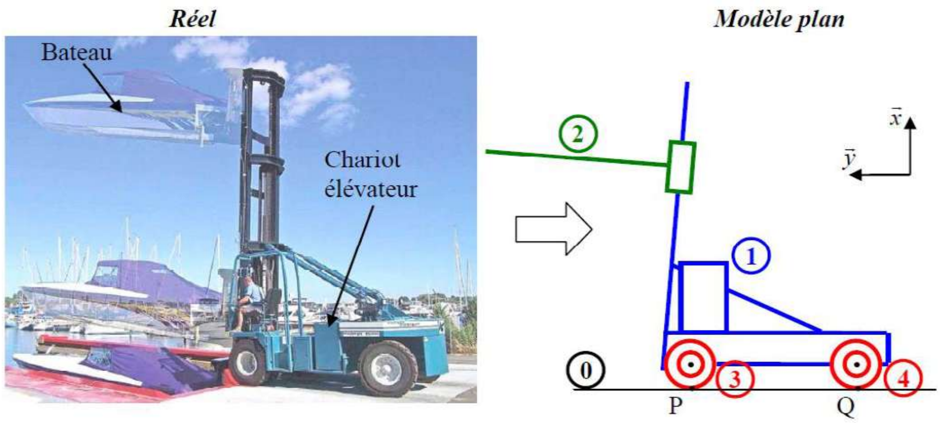
# Résolution des problèmes de statique avec frottement

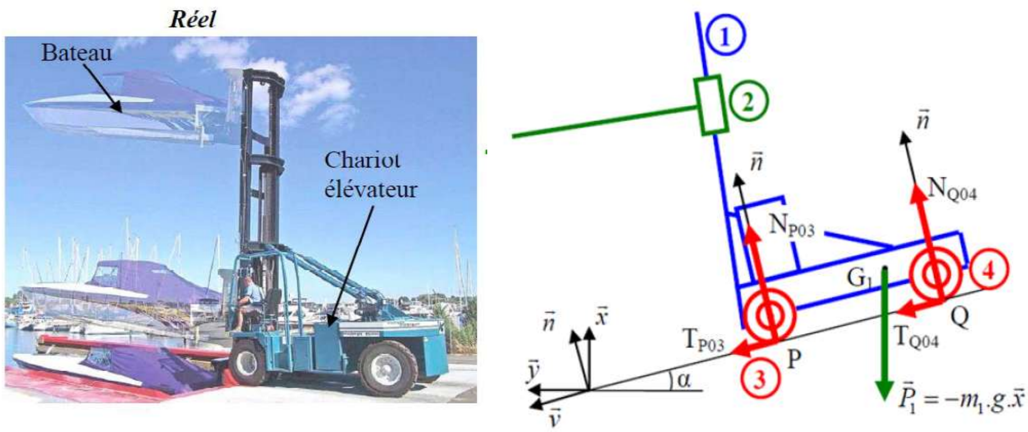



L'objectif de ce cours est de prendre en compte le frottement dans la résolution des problèmes de statique. Ainsi l'hypothèse des liaisons parfaites ne sera plus nécessaire pour résoudre un problème de statique.

## 1. Résolution analytique des problèmes de statique avec frottement

La méthode de résolution analytique des problèmes de statique reste la même que celle vue dans le cours de statique analytique. La prise en compte du frottement permet d'ajouter une équation scalaire supplémentaire (du type $T_{ij} = f_0 . N_{ij}$ à la limite du glissement) pour chaque couple de solides en contact avec frottement.

### 1.1. Application sur le chariot élévateur




Le constructeur de ce chariot élévateur se demande s'il est plus judicieux de placer les freins sur les roues avants, ou les roues arrières. L'objectif est de déterminer dans la configuration donnée ci-dessus, s'il est plus intéressant de freiner avec les roues avants ou arrières. On cherche alors à déterminer le coefficient de frottement minimal $f_{roue/sol}$ qui garantira le non-glissement du chariot dans les deux cas.

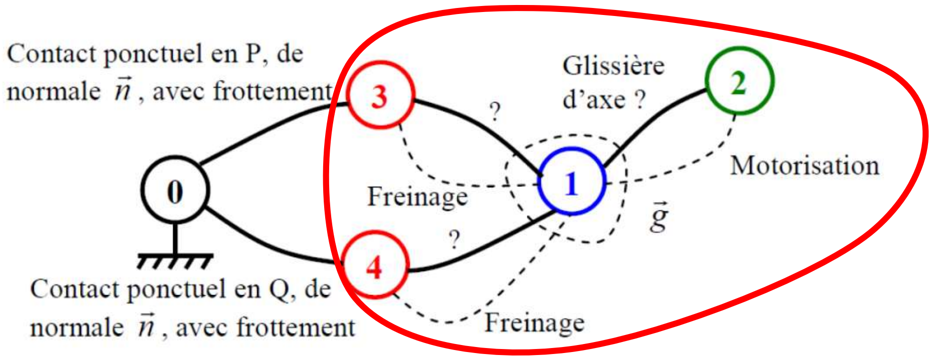
Les roues sont bloquées, freinées par un frein, et la liaison glissière est maintenu à sa hauteur par un moteur.

Données :

- $m_1 = 10\ 000$ kg
- $g = 10$ m.s$^{-2}$
- $\overrightarrow{QP} = a\,\vec{v}$
- $\overrightarrow{QG_1} = b\vec{n} + c\vec{v}$
- $a = 4\ m, b = 1\ m, c = 3\ m$
- le coefficient de frottement $f_{roue/sol}$ est noté $f$
- $\alpha = 20°$
- On néglige les masses des autres éléments.

***Q.1.*** **Pour la résultante des actions du sol sur la roue avant, respectivement arrière, déterminer le rapport $\boldsymbol{f_{av}}$, respectivement $\boldsymbol{f_{ar}}$, de l'action tangentielle $\boldsymbol{T_{03}}$, respectivement $\boldsymbol{T_{04}}$, sur l'action normale de la résultante $\boldsymbol{R_{03}}$, respectivement $\boldsymbol{R_{04}}$.**

Graphe de structure




**Simplification du problème :** Le système est plan. Aucun isolement n'est soumis qu'à deux glisseurs.

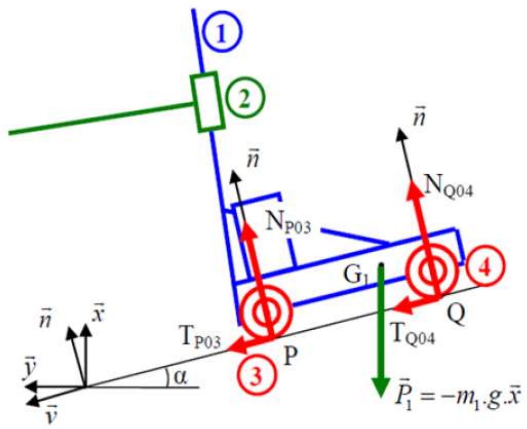
**On isole l'ensemble $\boldsymbol{E} = \{\mathbf{1+2+3+4}\}$** et on effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) :

- Action du sol sur les roues en $P$ : contact ponctuel avec frottement en P de normale $(P,\vec{n})$ :

$$\{\mathcal{T}_{0\to3}\} = \begin{Bmatrix} N_{03} & - \\ T_{03} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(P,\vec{n},\vec{v},\vec{z})}$$

- Action du sol sur les roues en $Q$ : contact ponctuel avec frottement en $Q$ de normale $(Q,\vec{n})$ :

$$\{\mathcal{T}_{0\to4}\} = \begin{Bmatrix} N_{04} & - \\ T_{04} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(Q,\vec{n},\vec{v},\vec{z})}$$




- Action de la pesanteur sur 1 en $G_1$ :

$$\{\mathcal{T}_{g\to1}\} = \begin{Bmatrix} -m_1 g & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(G_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

**On applique le PFS** sur l'ensemble $E$ au point $Q$.

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0\to3}} \\ \overrightarrow{M_{Q(0\to3)}} \end{Bmatrix}_Q + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0\to4}} \\ \overrightarrow{M_{Q(0\to4)}} \end{Bmatrix}_Q + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{g\to1}} \\ \overrightarrow{M_{Q(g\to1)}} \end{Bmatrix}_Q = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On distingue 2 cas suivant si c'est la roue avant ou arrière qui freine.

| Le frein est sur la roue avant ($T_{04} = 0$) | Le frein est sur la roue arrière ($T_{03} = 0$) |
|---|---|

Théorème de la résultante statique :

| | |
|---|---|
| $N_{03} + N_{04} - m_1 g \cos\alpha = 0$ (1) | $N_{03} + N_{04} - m_1 g \cos\alpha = 0$ (1) |
| $T_{03} + m_1 g \sin\alpha = 0$ $(2a)$ | $T_{04} + m_1 g \sin\alpha = 0$ $(2b)$ |

Théorème du moment statique :

$$-a.N_{03} + m_1 g(c\cos\alpha + b\sin\alpha) = 0 \quad (3)$$

Lois de Coulomb

| | |
|---|---|
| $T_{03} = f_{av} N_{03}$ $(4a)$ | $T_{04} = f_{ar} N_{04}$ $(4b)$ |

Dans les deux cas, on a 4 inconnues pour 4 équations scalaires → on peut résoudre le système.

**Résolution**

$$(3) \Rightarrow N_{03} = \frac{m_1 g(c\cos\alpha + b\sin\alpha)}{a}$$

$$(1) \Rightarrow N_{04} = m_1 g\cos\alpha - N_{03}$$

$$(2) \Rightarrow T_{03} = T_{04} = -m_1 g\sin\alpha$$

| | |
|---|---|
| $(4a) \Rightarrow f_{av} = \left\lvert\frac{T_{03}}{N_{03}}\right\rvert$ | $(4b) \Rightarrow f_{ar} = \left\lvert\frac{T_{04}}{N_{04}}\right\rvert$ |

**Applications numériques et conclusion :**

$$N_{03} = 79 \text{ kN}$$

$$N_{04} = 15 \text{ kN}$$

$$T_{03} = T_{04} = -34 \text{ kN}$$

| | |
|---|---|
| $f_{av} = 0{,}43$ | $f_{ar} = 2{,}3$ |

La première colonne du tableau suivant présente le coefficient de frottement pour divers couples de matériaux.

***Q.2.*** **Cocher les cases des autres colonnes s'il y a glissement avec le couple de matériaux considéré et le frein à la roue considérée.**

| | Glissement frein sur la roue avant | Glissement frein sur la roue arrière |
|---|---|---|
| Gomme – Béton : $f = 1$ | | X |
| Bois – Pierre : $f = 0{,}3$ | X | X |
| Bois – Béton : $f = 0{,}62$ | | X |

On comprend pourquoi on cherchait le $f_{roue/sol}$ minimal. En effet, si un couple de matériaux a un coefficient de frottement inférieur à celui trouvé par le rapport de effort tangentiel sur l'effort normal, il y a glissement.