Statique avec frottements
Véhicule 4x4

Q.1. Isoler le véhicule et déterminer les expressions littérales des autres inconnues des liaisons ponctuelles en fonction de la géométrie et de la masse du véhicule.

On isole le véhicule {1,2,3}.

BAME :

$$\{\mathcal{T}_{0\to2}\} = \begin{Bmatrix} Y_{02}\overrightarrow{y_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad ,\{\mathcal{T}_{0\to3}\} = \begin{Bmatrix} X_{03}\overrightarrow{x_1} + Y_{03}\overrightarrow{y_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B ,\{\mathcal{T}_{pes\to1}\} = \begin{Bmatrix} -Mg\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

On réalise le PFS en B :

$$\overrightarrow{M_{B,0\to2}} = \overrightarrow{BA} \wedge Y_{02}\overrightarrow{y_1} = (a+b)Y_{02}\overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{M_{B,pes\to1}} = \overrightarrow{BG} \wedge -Mg\overrightarrow{y_0} = (b\overrightarrow{x_1} + h\overrightarrow{y_1}) \wedge -Mg(\cos\alpha\,\overrightarrow{x_1} + \sin\alpha\,\overrightarrow{y_1}) = -bMg\cos\alpha\,\overrightarrow{z_1} + hMg\sin\alpha\,\overrightarrow{z_1}$$

On en déduit donc les trois équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} X_{03} - Mg\sin\alpha = 0 \\ Y_{02} + Y_{03} - Mg\cos\alpha = 0 \\ (a+b)Y_{02} - bMg\cos\alpha + hMg\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} X_{03} = Mg\sin\alpha \\ Y_{03} = Mg\dfrac{a\cos\alpha + h\sin\alpha}{a+b} \\ Y_{02} = Mg\dfrac{b\cos\alpha - h\sin\alpha}{a+b} \end{cases}$$

Q.2. Déterminer l'angle limite de glissement $\boldsymbol{\alpha_g}$ au-delà duquel la voiture glisse par rapport au sol.

A la limite de glissement (pente α_g), le modèle de Coulomb impose $|X_{03}| = f|Y_{03}|$, soit :

$$(a+b)Mg\sin\alpha_g = fMg\big(a\cos\alpha_g + h\sin\alpha_g\big)$$

$$(a+b-hf)\sin\alpha_g = fa\cos\alpha_g$$

$$\tan\alpha_g = \frac{fa}{(a+b-hf)}$$

Q.3. Déterminer l'angle limite de basculement $\boldsymbol{\alpha_b}$ au-delà duquel la voiture bascule en arrière.

Pour éviter le basculement du véhicule, il faut que la composante normale des actions mécaniques du sol sur les roues avant soit positive.

A la limite du basculement (pente α_b), on a donc :

$$Y_{02} = Mg\frac{b\cos\alpha_b - h\sin\alpha_b}{a+b} = 0$$

$$b\cos\alpha_b - h\sin\alpha_b = 0$$

$$\tan\alpha_b = \frac{b}{h}$$

Q.4. Calculer $\boldsymbol{\alpha_g}$ et $\boldsymbol{\alpha_b}$ pour a = 1,3 m, b = 1 m, h = 0,9 m, M = 1300 kg, f = 0,8. En déduire la pente maximale que pourrait gravir le véhicule.

AN : $\alpha_g = 33°$ et $\alpha_b = 48°$. Le plus limitant est α_g, donc la pente maximale que pourrait gravir ce véhicule est de 33°.

Frein de sécurité d'une grue portuaire

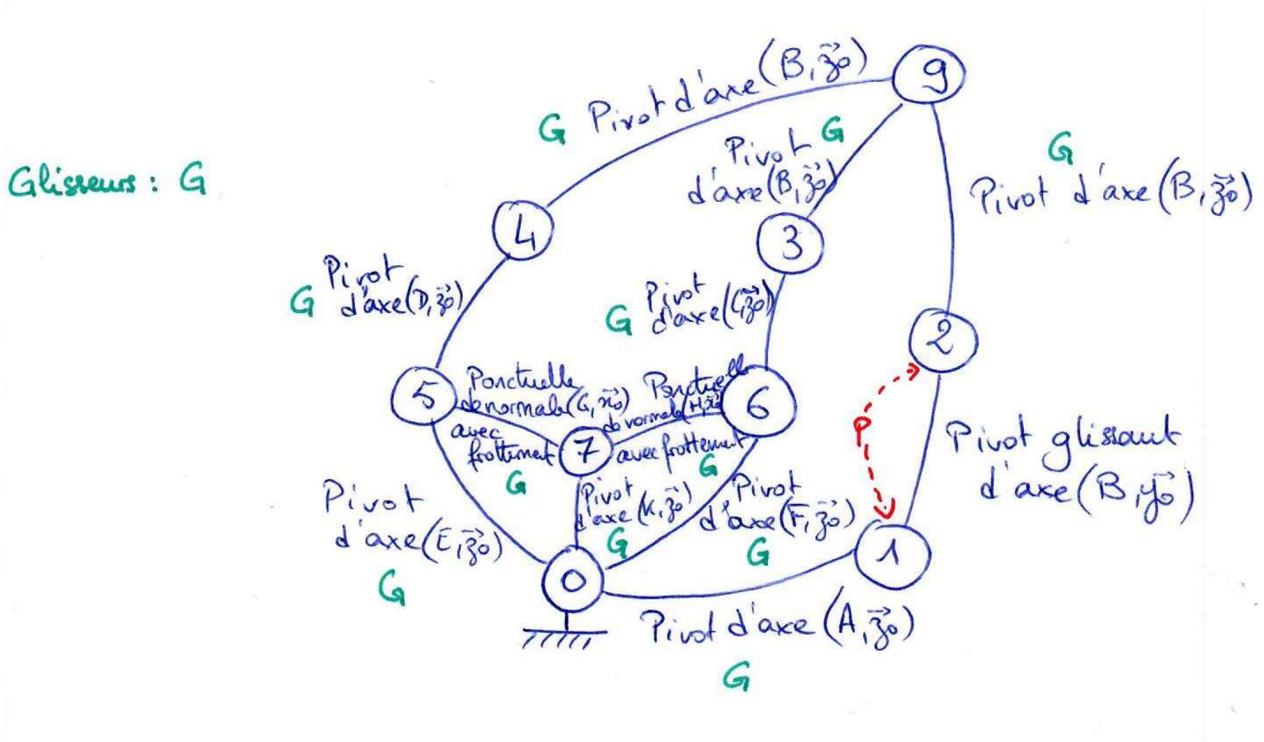
Q.1. La pression dans le vérin, est de 200 bar. La section utile du vérin est de 30 cm^2. Déterminer l'effort que le vérin exerce sur 9 pour serrer le frein. Justifier la direction de cet effort.

$\|\overrightarrow{F_{9\to2}}\| = p.S$ et donc $\overrightarrow{F_{2\to9}} = -p.S.\overrightarrow{y_0}$

A.N. : $p = 200.10^5$ Pa = ; $S = 30$ cm$^2 = 30.10^{-4}$ m^2

D'où, $\boxed{p.S = 60000 \text{ N} = 60 \text{ kN}}$

Q.2. Établir le graphe des liaisons et y ajouter les actions mécaniques extérieures.



1.1. Résoudre analytiquement le problème

Q.3. Déterminer la direction des efforts qu'exercent les pièces 3 et 4 sur la pièce 9 au point B.

On isole 4 : solide soumis à 2 glisseurs donc d'après le PFS les efforts sont de sens opposé, de même norme et de direction $\overrightarrow{x_4}$ (suivant BD) ⇒ $\boxed{\overrightarrow{F_{4\to9}} = -\overrightarrow{F_{4\to5}} = F_{49}.\overrightarrow{x_4}}$

On isole 3 : solide soumis à 2 glisseurs ⇒ $\boxed{\overrightarrow{F_{3\to9}} = -\overrightarrow{F_{3\to6}} = F_{39}.\overrightarrow{x_3}}$

Q.4. En isolant la pièce 9, déterminer littéralement les efforts $\overrightarrow{F_{3\to9}}$ et $\overrightarrow{F_{4\to9}}$, et en déduire les efforts $\overrightarrow{F_{3\to6}}$ et $\overrightarrow{F_{4\to5}}$. Faire l'application numérique.

On isole 9 :

Théorème de la résultante :

$$\overrightarrow{F_{2\to9}} + \overrightarrow{F_{3\to9}} + \overrightarrow{F_{4\to9}} = \vec{0}$$

$$-p.S.\overrightarrow{y_0} + F_{39}.\overrightarrow{x_3} + F_{49}.\overrightarrow{x_4} = \vec{0}$$

sur $\overrightarrow{x_0}$: $F_{39}\cos\alpha + F_{49}\cos\beta = 0$

sur $\overrightarrow{y_0}$: $F_{39}\sin\alpha + F_{49}\sin\beta = p.S$

$$F_{49} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}F_{39}$$

$$-\tan\beta\cos\alpha\, F_{39} + \sin\alpha\, F_{39} = p.S$$

D'où,

$$\boxed{F_{39} = \frac{p.S}{\sin\alpha - \tan\beta\cos\alpha}}$$

et donc ,

$$\boxed{F_{49} = -\frac{p.S.\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta - \tan\beta\cos\alpha\cos\beta} = \frac{p.S}{\sin\beta - \cos\beta\tan\alpha}}$$

A.N. : $F_{39} = 128670$ N ; $F_{49} = -91258$ N

Or $\overrightarrow{F_{4\to9}} = -\overrightarrow{F_{4\to5}}$ et $\overrightarrow{F_{3\to9}} = -\overrightarrow{F_{3\to6}}$ d'où $F_{36} = -128670$ N ; $F_{45} = 91258$ N

Q.5. Exprimer les forces $\overrightarrow{F_{3\to6}}$ et $\overrightarrow{F_{4\to5}}$ dans le repère R_0.

On a $\overrightarrow{F_{3\to6}} = -128670\,\overrightarrow{x_3}$; $\overrightarrow{F_{4\to8}} = 91258\,\overrightarrow{x_4}$

En projection dans le repère 0 :

$$\boxed{\begin{gathered}\overrightarrow{F_{3\to6}} = F_{36}\overrightarrow{x_3} = F_{36}(\cos\alpha\,\overrightarrow{x_0} + \sin\alpha\,\overrightarrow{y_0}) = -X_{36}\overrightarrow{x_0} - Y_{36}\overrightarrow{y_0}\\ \text{avec } X_{36} = 82\ k\text{N et } Y_{36} = 99\text{ kN}\end{gathered}}$$

De même :

$$\boxed{\begin{gathered}\overrightarrow{F_{4\to5}} = F_{45}\overrightarrow{x_4} = F_{45}(\cos\beta\,\overrightarrow{x_0} + \sin\beta\,\overrightarrow{y_0}) = X_{45}\overrightarrow{x_0} + Y_{45}\overrightarrow{y_0}\\ \text{avec } X_{45} = 82\text{ kN et } Y_{45} = 38\text{ kN}\end{gathered}}$$

Q.6. D'après le modèle de Coulomb, déterminer la direction générale des efforts $\overrightarrow{F_{7\to5}}$ en G et $\overrightarrow{F_{7\to6}}$ en H.

$$\overrightarrow{V_{H\in6/7}} = -\overrightarrow{V_{H\in7/6}} = -(-v.\overrightarrow{y_0}) = v.\overrightarrow{y_0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{T_{7\to6}}$ est dirigé vers le bas (opposé à $\overrightarrow{V_{H\in6/7}}$)

et donc $\overrightarrow{F_{7\to6}} = N_{76}\overrightarrow{x_0} - T_{76}\overrightarrow{y_0}$ et on choisit N_{76} et $T_{76} \geq 0$ avec $T_{76} = f.N_{76}$

$$\overrightarrow{V_{G\in5/7}} = -\overrightarrow{V_{G\in7/5}} = -v.\overrightarrow{y_0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{T_{7\to5}}$ est dirigé vers le haut (opposé à $\overrightarrow{V_{H\in6/7}}$)

et donc $\overrightarrow{F_{7\to5}} = -N_{75}\overrightarrow{x_0} + T_{75}\overrightarrow{y_0}$ et on choisit N_{75} et $T_{75} \geq 0$ avec $T_{75} = f.N_{75}$

Q.7. Isoler la pièce 5, appliquer le PFS et déterminer la composante tangentielle de $\overrightarrow{F_{7\to5}}$. Faire de même avec la pièce 6 : appliquer le PFS et déterminer la composante tangentielle de $\overrightarrow{F_{7\to6}}$.

On isole 5 :

B.A.M.E. :

$$\{\mathcal{T}_{4\to5}\} = \begin{Bmatrix} X_{45} & - \\ Y_{45} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(D,B_0)} \; ; \; \{\mathcal{T}_{7\to5}\} = \begin{Bmatrix} -N_{75} & - \\ T_{75} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(G,B_0)} \; ; \; \{\mathcal{T}_{0\to5}\} = \begin{Bmatrix} X_{05} & - \\ Y_{05} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(E,B_0)}$$

Théorème du moment au point E projeté sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$-hX_{45} + \frac{h}{2}N_{75} + eT_{75} = 0$$

or $T_{75} = f.N_{75} \Rightarrow -hX_{45} + \left(\frac{h}{2} + f.e\right)N_{75} = 0$

D'où la composante tangentielle :

$$\boxed{T_{75} = \frac{2hfX_{45}}{h + 2fe} = 78\ k\text{N}}$$

De la même manière, on isole 6 :

Théorème du moment en F :

$$hX_{36} - \frac{h}{2}N_{76} + eT_{76} = 0$$

Ainsi, comme pour 5 :

$$\boxed{T_{76} = \frac{2hfX_{36}}{h - 2fe} = 94\ k\text{N}}$$

Q.8. Déterminer le couple de freinage qu'exercent 5 et 6 sur 7.

$$\boxed{C_f = R(T_{75} + T_{76}) = 27 \times 10^3 \text{ N.m}}$$

Q.9. Calculer le poids maximal de l'objet que le frein de sécurité peut freiner et conclure quant au critère de l'exigence 1.1.4.

$$P_{max} = \frac{C_f}{r.g} = 27 \times 10^3 \text{ kg} = 27 \text{ tonnes} > 6 \text{ tonnes}$$

Donc le CdCF est vérifié.