

Modèle local avec frottement

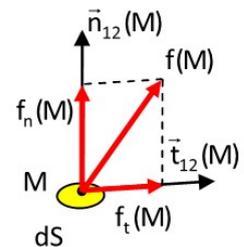
Les lois de Coulomb concernant le frottement de glissement ne sont valables que pour un contact ponctuel. Or, en fonction de la modélisation, le contact entre deux solides n'est pas ponctuel et s'effectue sur une surface. Pour déterminer les actions mécaniques de contact dans ce cas de figure, on considère alors de petites surfaces « quasi-ponctuelles » autour de chaque point de la zone de contact. Ensuite les lois de Coulomb sont appliquées sur des densités surfaciques d'effort.

1. Définition du modèle local avec frottement

On définit l'action mécanique élémentaire de l'élément de surface

$$d\vec{f}_{1\rightarrow 2} = \vec{f}(M) \cdot dS \text{ avec } \vec{f}(M) = f_n(M) \cdot \vec{n}_{12}(M) + f_t(M) \cdot \vec{t}_{12}(M)$$

- $f_n(M)$: densité surfacique normale d'effort en M ($f_n(M) = -p(M)$ dans le cas de pression de contact sur une surface)
- $\vec{n}_{12}(M)$: vecteur unitaire normal au plan tangent de la surface
- $f_t(M)$: densité surfacique tangentielle d'effort en M
- $\vec{t}_{12}(M)$: vecteur unitaire d'une direction du plan tangent de la surface



On applique ensuite les lois de Coulomb pour chacune des actions mécaniques élémentaires de la surface étudiée. La répartition de ces actions mécaniques élémentaires permet d'obtenir un champ vectoriel qui correspond à la modélisation locale des actions mécaniques.

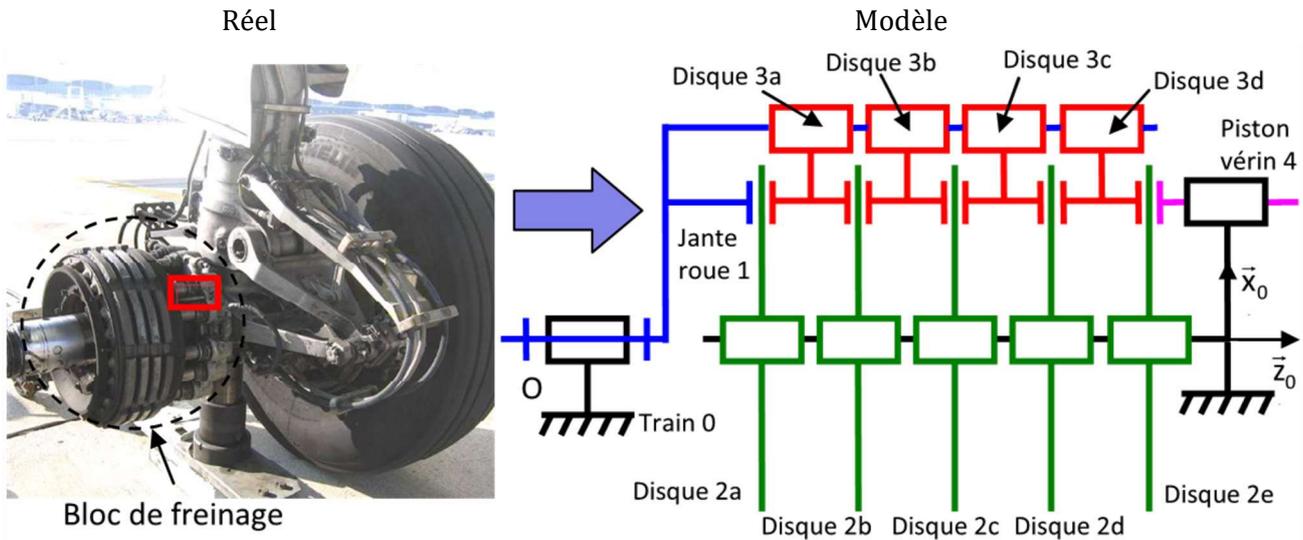
Les lois de Coulomb pour le modèle local sont les mêmes que celles présentées pour le contact ponctuel mais elles portent cette fois-ci sur les densités d'effort.

2. Définition du modèle global avec frottement

On note $\{\mathcal{J}_{1\rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1\rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A,1\rightarrow 2} \end{matrix} \right\}_A$ l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 sur une surface S. Le modèle global est obtenu à partir du modèle local :

$$\{\mathcal{J}_{1\rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1\rightarrow 2} = \int_S d\vec{f}_{1\rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A,1\rightarrow 2} = \int_S \vec{AM} \wedge d\vec{f}_{1\rightarrow 2} \end{matrix} \right\}_A$$

3. Application au système de freinage de l'A380

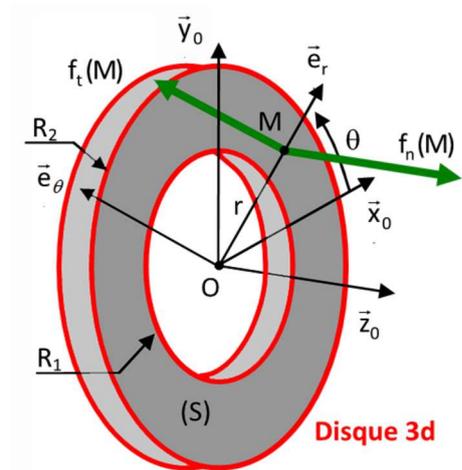


Le bloc de freinage est doté de 9 disques en carbone, 5 en liaison glissière d'axe (O, \vec{z}_0) par rapport au train repéré 0 (disques 2) et 4 en liaison glissière d'axe \vec{z}_0 par rapport à la jante de la roue repérée 1 (disques 3). Pour mettre en contact ces disques, et par conséquent freiner la jante de la roue 1, un dispositif hydraulique constitué de 14 vérins équi-répartis, dont le vérin 4, permet d'exercer une action mécanique sur le disque 2e définie par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{T}_{\text{vérins} \rightarrow 2e}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{vérins} \rightarrow 2e} = -F_0 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O \quad \text{où } F_0 = 10^6 \text{ N}$$

Cette action mécanique est intégralement transmise au disque 3d puis de proche en proche à tous les autres disques. Elle génère grâce au frottement un moment permettant d'immobiliser petit à petit le disque 3d par rapport au disque 2e. Par conséquent :

$$\{\mathcal{T}_{2e \rightarrow 3d}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2e \rightarrow 3d} = -F_0 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{O, 2e \rightarrow 3d} = M_0 \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O$$



Objectif de l'étude : Déterminer la relation entre l'effort presseur F_0 exercé par le dispositif hydraulique sur le disque **2e** et le moment de freinage global M_{global} exercé par le bloc de freinage sur la jante de la roue.

Compte tenu de la géométrie de la surface de contact (S) entre **2e** et **3d** on utilise les coordonnées polaires pour paramétrer cette surface.

Données : $R_2 = 300$ mm ; $R_1 = 200$ mm ; coefficient de frottement $f = 0,5$

3.1. Définition de l'action mécanique élémentaire et du modèle local

Par définition : $d\overrightarrow{f_{2e \rightarrow 3d}} = [f_n(M) \cdot \overrightarrow{n_{2e3d}}(M) + f_t(M) \cdot \overrightarrow{t_{2e3d}}(M)] \cdot dS$

On suppose que la pression de contact de **2e** sur **3d** est uniforme soit $f_n(M) = -p(M) = -p_0$

Le vecteur normal au plan tangent commun à **2e** et **3d** sortant de la matière de **3d** est $\overrightarrow{z_0}$ soit $\overrightarrow{n_{2e3d}}(M) = \overrightarrow{z_0}$

Il y a du glissement en M entre **3d** et **2e** et puisqu'on calcule les efforts de **2e** sur **3d**, on a donc :

$$\overrightarrow{t_{2e3d}}(M) = \frac{-\overrightarrow{V_{M,3d/2e}}}{\|\overrightarrow{V_{M,3d/2e}}\|}$$

avec $\overrightarrow{V_{M,3d/2e}} = \overrightarrow{V_{M,1/0}}$ car **3d** est solidaire en rotation de la jante **1** et **2e** du train **0**.

$\overrightarrow{V_{M,3d/2e}} = \overrightarrow{V_{M,1/0}} = \overrightarrow{V_{O,1/0}} + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -r \cdot \overrightarrow{e_r} \wedge \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{z_0} = r \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$ soit $\overrightarrow{t_{2e3d}}(M) = -\overrightarrow{e_\theta}$ si $\dot{\theta}_{10} > 0$

L'existence du glissement induit que $f_t(M)$ est sur le cône de frottement soit $f_t(M) = f \cdot f_n(M)$.

Finalement l'action mécanique élémentaire s'écrit :

$$d\overrightarrow{f_{2e \rightarrow 3d}} = (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS$$

3.2. Définition du modèle global

On intègre le modèle local sur la surface (S) :

$$\{\mathcal{J}_{2e \rightarrow 3d}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = \int_S (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS \\ \overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS \end{array} \right\}_O$$

Calcul de la résultante :

$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = \int_S (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS \text{ avec } dS = r \cdot dr \cdot d\theta \text{ et } \overrightarrow{e_\theta} = -\sin \theta \cdot \overrightarrow{x_0} + \cos \theta \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot (-\sin \theta \cdot \overrightarrow{x_0} + \cos \theta \cdot \overrightarrow{y_0})) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -p_0 \cdot \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \overrightarrow{z_0} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta + f \cdot p_0 \cdot \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (-\sin \theta \cdot \overrightarrow{x_0} + \cos \theta \cdot \overrightarrow{y_0}) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} r \cdot dr + \vec{0}$$



$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -p_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \cdot \overrightarrow{z_0}$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) \cdot \overrightarrow{z_0}}$$

Calcul du moment :

$$\overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS = \int_S r \cdot \overrightarrow{e_r} \wedge (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS$$

$$\overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = \int_S (r \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta} + f \cdot r \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{z_0}) \cdot dS$$

$$\overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = p_0 \cdot \int_0^{2\pi} \overrightarrow{e_\theta} \cdot d\theta \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr$$

$$\overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = \vec{0} + f \cdot p_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \cdot \overrightarrow{z_0}$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = \frac{2}{3} f \cdot p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3) \cdot \overrightarrow{z_0}}$$

Sachant que $\{\mathcal{J}_{2e \rightarrow 3d}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -F_0 \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = M_0 \cdot \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_O$, on a :

$$F_0 = p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) \text{ et } M_0 = \frac{2}{3} f \cdot p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)$$

On a donc :

$$p_0 = \frac{F_0}{\pi \cdot (R_2^2 - R_1^2)}$$

Par conséquent :

$$\boxed{M_0 = \frac{2}{3} f \cdot F_0 \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)}}$$

Le moment de freinage global M_{global} exercé par le bloc de freinage sur la jante de la roue correspond au moment M_0 multiplié par le nombre de surfaces en contact entre les disques (9 sur le bloc de l'A320).

$$M_{global} = 9 \cdot M_0$$

Donc :

$$\boxed{M_{global} = 6 \cdot f \cdot F_0 \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)}}$$