

MF1 : Statique des fluides

L'étude mécanique d'une particule de fluide permet d'établir la loi de l'hydrostatique et l'expression de la densité volumique des forces pressantes. Cette loi est ensuite intégrée dans les cas d'un fluide homogène et incompressible et de l'atmosphère isotherme, ce qui permet au passage de mettre en évidence le facteur de BOLTZMANN. Enfin, on voit comment calculer la résultante des forces pressantes s'exerçant sur un solide.

I. Loi de l'hydrostatique

1. Forces s'exerçant sur une particule fluide

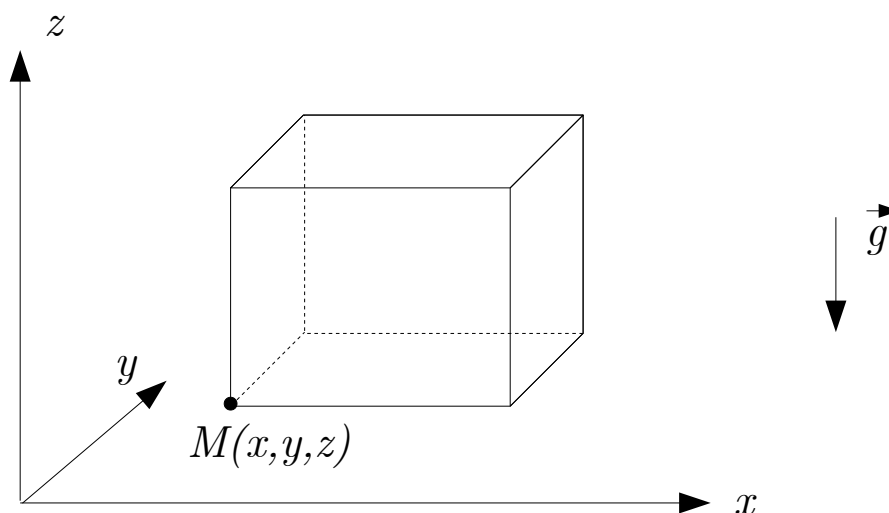
On se place à l'échelle mésoscopique pour pouvoir étudier les inhomogénéités du fluide tout en étudiant des grandeurs macroscopiques (T , p , ρ , etc). Le système étudié est une petite portion de fluide appelée **particule de fluide**.

Définition : Une **particule de fluide** ou **particule fluide** est un volume mésoscopique $d\tau$ de fluide, de masse dm , placé en un point M .

Remarque : La masse volumique du fluide au point M est $\rho(M) = \frac{dm}{d\tau}$. Les notations dm et $d\tau$ sont là pour nous rappeler qu'on travaille à l'échelle mésoscopique. **Attention !** Ce ne sont pas des variations temporelles.

Forces s'exerçant sur la particule de fluide

On se place en coordonnées cartésiennes et on étudie une particule de fluide parallélépipédique situé en M de coordonnées (x, y, z) . Le volume de cette particule est $d\tau =$



Propriété : On pourra retenir finalement que la densité volumique des forces pressantes est



Ainsi, la résultante des forces pressantes sur la particule fluide est



Remarque : Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}p}(M)$ est dirigé dans le sens où les dérivées partielles sont positives, donc dans le sens où la pression augmente. Du point de vue de l'interprétation physique, la notion de gradient peut être vue comme une généralisation à 3D de la notion de la dérivée.

2. Loi de l'hydrostatique

Soit une particule fluide au repos, dans le champ de pesanteur terrestre \vec{g} . Appliquons le principe fondamental de la statique à cette particule.

La suite du cours consiste à intégrer cette équation dans les 2 cas particuliers des fluides modèles vus en thermodynamique : la phase condensée incompressible et le gaz parfait.

II. Champs de pression

1. Modèle de l'atmosphère isotherme

On souhaite établir l'expression de $p(z)$ dans l'atmosphère.

On modélise l'atmosphère par un gaz parfait de température constante égale à $T_0 = 293$ K et de masse molaire $M = 29$ g/mol.

Le champ de pesanteur \vec{g} est supposé constant, de norme $g_0 = 9,81$ m.s⁻².

On note $p_0 = 1$ bar la pression au niveau du sol.

L'axe (Oz) désigne la verticale ascendante.

1. A l'aide de l'équation des gaz parfaits, exprimer ρ et fonction de p .
2. Etablir, à l'aide de la loi de l'hydrostatique projetée sur (Oz) , l'équation différentielle vérifiée par $p(z)$.
3. Faire apparaître une grandeur H homogène à une longueur et calculer son ordre de grandeur.
4. Intégrer l'équation différentielle en tenant compte des conditions aux limites. *On la résoudra de 2 manières différentes : en la mettant sous forme canonique, et avec une séparation des variables.*
5. Tracer la fonction $p(z)$.
6. Commenter la valeur de H .

A faire sur une feuille

2. Facteur de BOLTZMANN

Toujours sur l'exemple de l'atmosphère isotherme, intéressons-nous à la répartition des molécules en fonction de l'altitude z . Déterminons pour cela $n^*(z)$.

On a

$$n^* = \frac{N}{V} = \frac{p\mathcal{N}_A}{RT}$$

définition Faire apparaître n $n = ?$

Ainsi,

$$n^*(z) = \frac{p_0\mathcal{N}_A}{RT} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) = n_0^* \exp\left(-\frac{z}{H}\right) = n_0^* \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

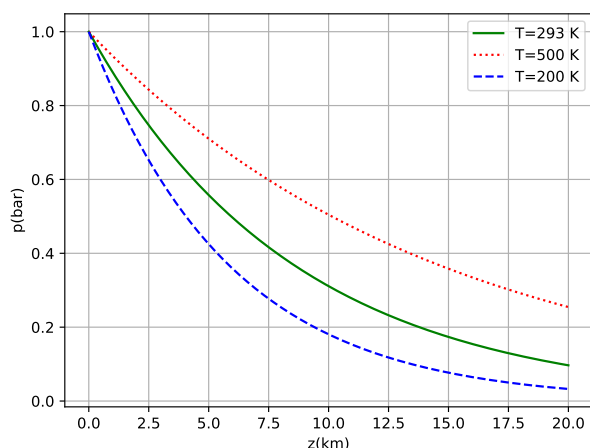
Il vient donc

$$n^*(z) = n_0^* e^{\frac{-\mu gz}{k_B T}} = n_0^* e^{\frac{-E_{pp}(z)}{k_B T}}$$

Interprétation

- Il existe une compétition entre la pesanteur qui "fait tomber" les molécules, car leur état le plus stable est celui qui minimise leur énergie potentielle de pesanteur (les particules ne sont soumises qu'à une seule force qui est leur poids) et l'agitation thermique qui tend à uniformiser la répartition des molécules et à les éloigner les unes des autres. L'énergie caractéristique d'agitation thermique est de l'ordre de grandeur de $k_B T$.
- Ainsi, le nombre moyen de particules situées en z dépend du rapport $\frac{E_{pp}(z)}{k_B T}$.

A une température donnée, plus $E_{pp}(z)$ est faible, plus $e^{-\frac{E_{pp}(z)}{k_B T}}$ est grand, donc plus il y a de particules : il y a donc plus de particule aux z les plus faibles car les particules tendent à minimiser leur énergie potentielle.



Cependant, on voit sur les courbes de simulation suivantes que plus T est grande, moins la fonction $n^*(z)$ décroît vite. En effet, l'agitation thermique homogénéise la répartition des particules et contrebalance ainsi à l'effet de la gravité qui stabilise les particules aux z les plus faibles. Inversement, moins il y a d'agitation thermique, plus il y a de particules proches de $z = 0$, position qui minimise leur énergie potentielle.

Ce résultat est généralisable :

Énoncé : A l'intérieur d'un système thermodynamique dont l'énergie des particules peut prendre différentes valeurs E_i ou $E(M)$ (discrètes ou non) le nombre des particules N_i possédant l'énergie E_i est

$$N_i = K e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \quad (\text{ou} \quad N(M) = K e^{-\frac{E(M)}{k_B T}}) \quad \text{où } K \text{ est une constante.}$$

Le terme $e^{-\frac{E}{k_B T}}$ est appelé **facteur de BOLTZMANN**.

Il traduit une compétition entre l'agitation thermique et un autre effet, associé à l'énergie E

Une autre façon de le voir est la suivante : en augmentant la température, on peut, grâce à l'agitation thermique, peupler davantage les niveaux d'énergies moins stables.