CN5 : Simulation du champ de pression dans l'atmosphère

I. Préliminaire

On considère l'atmosphère, constituée d'air de masse molaire $M = 29$ g/mol, considéré comme un gaz parfait de température $T(z)$, l'axe Oz étant suivante la verticale ascendante, le niveau $z = 0$ se trouvant au niveau du sol.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la pression $p(z)$.

Dans le cours, nous allons résoudre analytiquement cette équation en considérant $T(z) = T_0$ constante. Nous nous proposons ici d'utiliser un modèle plus proche de la réalité en tenant compte des variations de température de l'atmosphère.

Pour cela, on considèrera une hauteur H_{max} et un pas d'intégration h. On déterminera alors numériquement les valeurs $p_k = p(z_k) = p(k \times h)$ à l'aide de la méthode d'Euler, la fonction $T(z)$ étant supposé connue.

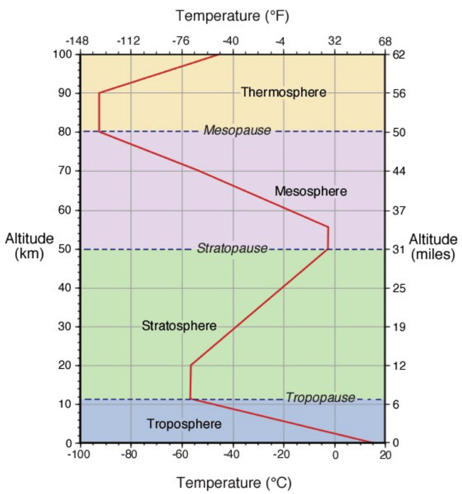
2. On souhaite connaître $p(z)$ pour z allant de 0 à H_{max} inclus. Quele relation existe-t-il entre N et h ?
3. Ecrire la relation de récurrence entre p_{k+1} et p_k, toujours en considérant que la fonction $T(z)$ est connue.

II. Profil de température

L'évolution de la température $T(z)$ en fonction de l'altitude peut être modélisée par une fonction affine par morceaux comme sur le schéma ci-contre.

Les points caractéristiques (altitude et température) aux frontières des différents domaines de comportement de la température sont enregistrés sous forme de 2 colonnes dans le fichier `donnees.txt` dont on donne un extrait :

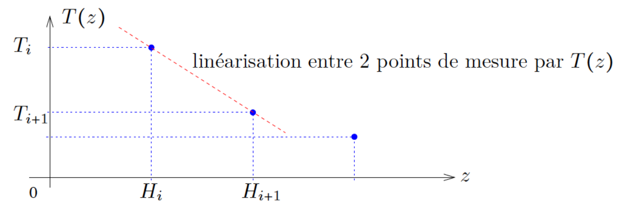
```
H     T
m     K
0     289
11000   215
20000   215
...    ...
```



http ://www.physicalgeography.net /fundamentals/7b.html

4. Écrire un script permettant d'extraire les données de ce fichier et de les enregistrer respectivement dans deux tableaux (`array`) : `listeH` et `listeTemp`.

5. Affecter à la variable H_{max} sa valeur, à savoir la dernière valeur de la liste `listeH`.
6. Afin de définir une fonction qui calcule et renvoie la température à l'altitude z, on considère qu'entre deux points caractéristiques la température varie linéairement selon le schéma ci-dessous.



En déduire l'équation de la droite $T(z)$ passant par les deux points de mesure successifs (H_i, T_i) et (H_{i+1}, T_{i+1}) (données contenues dans les listes `listeH` et `listeTemp`) :

$$T(z) = T_i + (z - H_i)\frac{T_{i+1} - T_i}{H_{i+1} - H_i}$$

7. On souhaite définir une fonction `T(z)`. On pourra pour cela parcourir la liste des valeurs de `listeH` à l'aide d'une boucle `while` jusqu'à trouver l'intervalle $[H_i, H_{i+1}]$ dans lequel se trouve z, avant d'appliquer la formule précédente.
8. Tracer la courbe de la fonction $T(z)$ sur l'intervalle $z \in [0, H_{max}]$ avec 1000 points.

   Attention ! La fonction $T(z)$, qui contient une boucle, ne peut pas s'appliquer sur un tableau, il faudra donc créer la liste des ordonnées par compréhension.

   Vérifier ainsi que cette courbe est cohérente avec le profil de température donné plus haut.
9. A l'aide de la liste utilisée pour le tracé précédent, calculer la température moyenne T_0 sur l'intervalle $z \in [0, H_{max}]$.

III. Résolution de l'équation

10. Ecrire enfin le script python permettant la résolution de l'équation d'évolution de $p(z)$. On prendra comme condition aux limites $p(z = 0) = p_0 = 10^5$ Pa.
11. Résoudre numériquement l'équation avec $N = 1000$ et afficher la courbe $p(z)$.
12. Dans le modèle d'une atmosphère isotherme à la température T_0, la résolution analytique de l'équation de la statique des fluides donne $p(z) = p_0 \exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT_0}\right)$. Superposer le tracé graphique de cette fonction au graphe précédent en prenant comme valeur de T_0 la température moyenne et commenter.