Colles 12 - 18/12/2023 au 22/12/2023

Thèmes traités en classe

- Chapitre 10 : Ensembles, logique et rédaction.
  Exercices traités en classe : I.1, I.3, I.4, I.6, II.1, II.2, II.3, II.4, II.6, II.7, II.8.
- Chapitre 11 : Parties de $\mathbb{R}$.
  Exercices traités en classe : 2, 3, 4.
- Chapitre 12 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.
  - ▹ Diviseurs, multiples, division euclidienne.
  - ▹ PGCD, PPCM, algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD.
  - ▹ Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers, infinité des nombres premiers.

  Exercices traités en classe : 1, 4.
- Chapitre 13 : Applications.
  - ▹ Définitions, prolongement, restriction, composition.
  - ▹ Image directe, image réciproque, opérations.
  - ▹ Injectivité, surjectivité, bijectivité, application réciproque.

  Exercices traités en classe : 1, 3, 4, 5.

Questions de cours

- Distributivité de $\cap$ sur $\cup$: $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Donner la définition de $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0, 1]$.
- C10, Exercice II.2 : Soit $a < b$ deux réels. Montrer que $[a, b] = \{ta + (1-t)b,$ avec $t \in [0, 1]\}$.
- C10, Exercice II.6 : Montrer que : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$ par contraposée.
- Donner la définition de borne supérieure/inférieure. Énoncer la propriété de la borne supérieure. C11, Exercice 4 : On prend $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ non vides et majorées et on pose $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- Donner la définition de nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- Définition d'image directe. Image directe d'une intersection, contre-exemple pour l'inclusion réciproque.
- Définition d'image réciproque. Image réciproque d'une intersection, d'une union.
- Définition d'application injective (avec les quantificateurs). Montrer que la composée de deux applications injectives est injective, puis que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Définition d'application surjective (avec les quantificateurs). Montrer que la composée de deux applications surjectives est surjective, puis que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

A savoir faire

1. Savoir démontrer une inclusion entre deux ensembles.
2. Savoir montrer une égalité entre deux ensembles par double inclusion.
3. Connaître les propriétés de calcul sur les ensembles.
4. Savoir montrer qu'un nombre est irrationnel en raisonnant par l'absurde.
5. Savoir justifier l'existence d'une borne sup/inf.
6. Savoir calculer le PGCD de deux entiers :
   - avec l'algorithme d'Euclide ;
   - en utilisant la décomposition en facteurs premiers.
7. Savoir montrer qu'une application est injective/surjective/bijective :
   - En utilisant les définitions.
   - En utilisant une application réciproque (lorsqu'elle existe)
   - En utilisant le TBM (pour des fonctions réelles).