Colles 15 - 22/01/2024 au 26/01/2024

Thèmes traités en classe

- Chapitre 14 : Suites numériques.
  - ▹ Variations, bornétude, opérations.
  - ▹ Exemples : suites arithmético-géométriques, suites d'ordre 2.
  - ▹ Étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
  - ▹ Limite d'une suite, unicité de la limite, toute suite convergente est bornée.
  - ▹ Opérations sur les limites.
  - ▹ Suites extraites et limites.
  - ▹ Limites et inégalités.
  - ▹ Théorème d'encadrement.
  - ▹ Théorème de la limite monotone.
  - ▹ Théorème des suites adjacentes.
  - ▹ Comparaison de suites : domination, négligeabilité, équivalence.

  Exercices traités en classe : I.1, I.2 I.3, I.4, I.8, I.9, I.10, II.3, II.4, II.5, II.6, II.7, II.8, II.9, II.10, II.15, II.14, II.12, II.17, II.18, II.19, II.20, II.21.
- Chapitre 15 : Calcul matriciel.
  1. Combinaisons linéaires de matrices.
  2. Produit matriciel, puissances de matrices carrées, Newton.
  3. Matrices élémentaires.

  Exercices traités en classe : 1, 2, 3.

Questions de cours

- Toute suite convergente est bornée : énoncé et démonstration.
- Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell > 0$. Alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Démonstration lorsque $\ell \in \mathbb{R}$.
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite ℓ, alors (u_n) tend aussi vers ℓ. Démonstration lorsque $\ell \in \mathbb{R}$.
- Énoncer le théorème d'encadrement. Démontrer le cas où la suite est majorée par une suite qui tend vers $-\infty$.
- Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone dans le cas croissant.
- C14 Exercice II.10 : Montrer que la suite (H_n) définie par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que $H_n \to +\infty$.
- Sur demande, pour les plus motivés : C14 Exercice II.5 : soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to \ell$.
- C14 Exercice II.14 : Soit (u_n) une suite numérique et $k \in]0,1[$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$. Montrer que (u_n) converge vers 0.
- Définition de domination, négligeabilité, équivalence. Montrer que $n! = o(n^n)$.
- C14 Exercice II.19 : Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et $v_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.
- Définition du produit matriciel : avec la formule et avec un dessin. Calcul du produit de deux matrices élémentaires : avec un dessin puis avec la formule.

A savoir faire

1. Étudier la monotonie d'une suite.
2. Savoir déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique et d'une suite récurrente d'ordre 2.
3. Savoir utiliser l'étude des fonctions f et $x \mapsto f(x) - x$ pour étudier la monotonie de $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Connaître les définitions de $u_n \to \ell$ et $u_n \to \pm\infty$.
5. Savoir appliquer proprement les théorèmes d'encadrement et de la limite monotone.
6. Savoir encadrer une somme en utilisant le plus petit terme et le plus grand terme.
7. Savoir montrer que deux suites sont adjacentes.
8. Savoir trouver un équivalent simple d'une suite et en déduire une limite.
9. Savoir calculer un produit matriciel.
10. Savoir calculer les puissances d'une matrice :
    (a) en conjecturant une formule démontrée par récurrence,
    (b) en appliquant Newton.