Colles 19 - 04/03/2024 au 08/03/2024

Thèmes traités en classe

- Chapitre 16 : Continuité.
  Exercices traités en classe : I.3, II.3, III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.7, III.8, III.11, III.13, III.14, III.15.
- Chapitre 17 : Dérivabilité.
  1. Dérivée en un point, dérivée à gauche, dérivée à droite, tangente.
  2. Développement limité à l'ordre 1.
  3. Opérations sur les dérivées, dérivée de la réciproque.
  4. Extrema locaux, points critiques.
  5. Rolle, TAF, IAF.
  6. Caractérisation de la monotonie et de la stricte monotonie.
  7. Limite de la dérivée.
  8. Fonctions lipschitziennes.
  9. Dérivées successives, classe d'une fonction.
  10. Formule de Leibniz.
  11. Fonctions à valeurs complexes.
  12. Convexité.

  Exercices traités en classe : I.1, I.2, I.3, I.4, II.1, II.2, II.6, II.10, IV.1, III.1, III.2, V.1, V.2.
- Chapitre 18 : Polynômes.
  1. Polynômes à une indéterminée, degré.
  2. Opérations sur les polynômes.
  3. Dérivation formelle.
  4. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: divisibilité, division euclidienne, polynômes irréductibles.

  Exercices traités en classe : I.1, I.3, II.2, II.4.

Questions de cours

- C16 Exercice III.14 : Montrer qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Donner un contre-exemple si la fonction est seulement périodique, puis si elle est seulement continue.
- Théorème de Rolle : énoncé et démonstration.
- Théorème des accroissements finis : énoncé et démonstration.
- Exemple du cours : Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, prolongeable par continuité en 0, dérivable en 0, mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Définition de f est convexe et illustration avec un dessin. Énoncer la caractérisation de la convexité pour les fonctions 2 fois dérivables (sans la démonstration). Établir les inégalités : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geq 1 + x$ et $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.
- Énoncer la formule de Leibniz. Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^{3x}}{1+x}$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et calculer sa dérivée n-ième pour $n \in \mathbb{N}$.
- Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes. Montrer l'unicité.
- Donner les formules pour le degré de la somme, du produit, de la composée de deux polynômes. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $m \in [\![0, \deg(P)]\!]$, alors $\deg(P^{(m)}) = \deg(P) - m$, démonstration.

A savoir faire

1. Savoir appliquer le TVI, TBA et TBM en vérifiant précisément les hypothèses.
2. Savoir prouver la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle/en un point.
3. Savoir appliquer Rolle, le TAF et l'IAF.
4. Savoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée pour vérifier qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$.
5. Savoir appliquer la formule de Leibniz.
6. Savoir appliquer la convexité/concavité pour démontrer des inégalités.
7. Savoir déterminer le degré d'un polynôme.
8. Savoir poser la division euclidienne de deux polynômes.