Colles 20 - 11/03/2024 au 15/03/2024

Thèmes traités en classe

- Chapitre 17 : Dérivabilité.
  Exercices traités en classe : I.1, I.2, I.3, I.4, II.1, II.2, II.6, II.10, IV.1, III.1, III.2, V.1, V.2.
- Chapitre 18 : Polynômes.
  1. Polynômes à une indéterminée, degré.
  2. Opérations sur les polynômes.
  3. Dérivation formelle.
  4. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: divisibilité, division euclidienne, polynômes irréductibles.
  5. Formule de Taylor.
  6. Racines, multiplicité, lien avec la divisibilité.
  7. Nombre maximal de racines.
  8. Polynômes scindés, relations coefficients-racines.
  9. Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
  10. Irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
  11. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à pôles simples.

  Exercices traités en classe : I.1, I.3, II.2, II.4, III.1, III.3, III.7, III.8, IV.2, IV.3, IV.8, V.2.

Questions de cours

Pour tout le monde : Déterminer une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à pôles simples.

- Définition de f est convexe et illustration avec un dessin. Énoncer la caractérisation de la convexité pour les fonctions 2 fois dérivables (sans la démonstration). Établir les inégalités : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ et $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.
- Énoncer la formule de Leibniz. Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^{3x}}{1+x}$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et calculer sa dérivée n-ième pour $n \in \mathbb{N}$.
- Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes. Montrer l'unicité.
- Donner les formules pour le degré de la somme, du produit, de la composée de deux polynômes. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $m \in [\![0, \deg(P)]\!]$, alors $\deg(P^{(m)}) = \deg(P) - m$, démonstration.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que α est racine de P ssi $X - \alpha | P$.
- Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis calcul de la somme et du produit des racines de l'unité en utilisant les relations coefficients-racines.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. α est racine de P ssi $\overline{\alpha}$ est racine de P. Puis, α est racine de multiplicité m de P ssi $\overline{\alpha}$ est racine de multiplicité m de P.
- Exemple du cours : factorisation de $X^6 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- C18 Exercice III.7 : résoudre $Q(X) = Q(X+1)$ d'inconnue $Q \in \mathbb{C}[X]$ par analyse-synthèse.
- C18 Exercice IV.3 : soit $P = X^8 + 9X^7 + 23X^6 + 27X^5 + 63X^4 + 27X^3 + 61X^2 + 9X + 20$. Vérifier que i est racine de P puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- C18 Exercice IV.8 : on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
  1. Factoriser $\cos(nx) + \cos((n-2)x)$ et en déduire une relation entre T_n, T_{n-1} et T_{n-2}.
  2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.

A savoir faire

1. Savoir prouver la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle/en un point.
2. Savoir appliquer Rolle, le TAF et l'IAF.
3. Savoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée pour vérifier qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$.
4. Savoir appliquer la formule de Leibniz.
5. Savoir appliquer la convexité/concavité pour démontrer des inégalités.
6. Savoir déterminer le degré d'un polynôme.
7. Savoir poser la division euclidienne de deux polynômes.
8. Savoir utiliser une racine évidente et sa multiplicité pour factoriser un polynôme.
9. Savoir montrer qu'un polynôme divise un autre en étudiant les racines et leurs multiplicités.
10. Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
11. Savoir faire une décomposition en éléments simples pour déterminer une primitive, calculer une dérivée, une somme, etc…