Colles 23 - 01/04/2024 au 05/04/2024

Thèmes traités en classe

- Chapitre 20 : Espaces vectoriels.
  1. Définition et exemples importants.
  2. Combinaisons linéaires.
  3. Sous-espaces vectoriels : définition, exemples.
  4. Intersection de sev, sev engendré par une famille finie de vecteurs.
  5. Famille génératrice, famille libre/liée, base.
  6. Somme de deux sev.
  7. Somme directe, supplémentaires.

  Exercices traités en classe : I.1, I.2, I.3, II.1, II.8, II.9, II.4, II.5, II.10, III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.7.
- Chapitre 21 : Dénombrement.
  1. Cardinal d'un ensemble fini, cardinal d'une partie.
  2. Injectivité/surjectivité/bijectivité et cardinal.
  3. Cardinal d'une union, du complémentaire, du produit cartésien.
  4. Nombre d'applications de E dans F.
  5. Nombre de p-listes, de p-arrangements, de permutations.
  6. Nombre de p-combinaisons, retour sur les coefficients binomiaux.

  Exercices traités en classe : 1, 2, 3

Questions de cours

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire $AX = 0$ (avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) est un sev de $\mathbb{K}^p$. Illustration avec le cas des droites vectorielles du plan et des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- L'intersection d'une famille de sev est un sev.
- Sev engendré par $(u_1, \dots, u_p)$: définition et démonstration que c'est un sev.
- Une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré est libre. Démonstration par l'absurde.
- C20 Exercice II.8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
  1. Montrer que F est un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
  2. Déterminer une base de F.
- Définition de la somme de deux sev et de somme directe. Montrer que la somme de deux sev est un sev.
- Donner la définition de famille libre et famille génératrice. Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ base de F et $\mathscr{G} = (v_1, \dots, v_p)$ base de G. Donner les conditions sur $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ pour que F et G soient en somme directe/supplémentaires.
- Montrer que F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.
- Définition de supplémentaires. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Définition de p-listes, de p-arrangements et de p-combinaisons. Donner les formules. Justifier la formule pour les p-combinaisons à l'aide du principe des bergers.

A savoir faire

1. Savoir montrer qu'une partie d'un $\mathbb{K}$-ev est un sev.
2. Savoir vérifier qu'une famille est libre/liée, génératrice ou non, une base ou non.
3. Savoir écrire un sev comme un Vect pour trouver une base.
4. Savoir montrer que deux sev sont en somme directe.
5. Savoir montrer que deux sev sont supplémentaires en utilisant une analyse-synthèse.
6. Connaître les formules de dénombrement.
7. Savoir modéliser une situation de dénombrement par des tirages successifs avec/sans remise ou simultanés.