Colles 24 - 22/04/2024 au 26/04/2024

Thèmes traités en classe

- Chapitre 20 : Espaces vectoriels.
  Exercices traités en classe : I.1, I.2, I.3, II.1, II.8, II.9, II.4, II.5, II.10, III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.7.
- Chapitre 21 : Dénombrement.
  Exercices traités en classe : 1 à 8, 15, 17, 20.
- Chapitre 22 : Dimension.
  1. Dimension finie : dénition, théorèmes de la base extraite et de la base incomplète.
  2. Lemme de Steinitz, cardinal dune famille libre/base/génératrice.
  3. Rang dune famille finie de vecteurs.
  4. Dimension dun sev.
  5. Dimension dune somme directe, formule de Grassmann.
  6. Existence dun supplémentaire en dimension finie, caractérisation avec la dimension.

  Exercices traités en cours : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 13.

Questions de cours

- Définition de la somme de deux sev et de somme directe. Montrer que la somme de deux sev est un sev.
- Donner la définition de famille libre et famille génératrice. Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ base de F et $\mathscr{G} = (v_1, \dots, v_p)$ base de G. Donner les conditions sur $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ pour que F et G soient en somme directe/supplémentaires.
- Montrer que F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.
- Définition de supplémentaires. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Définition de p-listes, de p-arrangements et de p-combinaisons. Donner les formules. Justifier la formule pour les p-combinaisons à l'aide du principe des bergers.
- C21 Exercice 20 : établir la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p}$ en comptant les parties à p éléments de $[\![1, n]\!]$ de deux façons différentes.
- Donner la définition de dimension finie et énoncer le théorème de la base incomplète. Montrer que tout sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie admet un supplémentaire.
- C22 Exercice 9 : soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$. Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$ puis trouver une base de E et une base dun supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- C22 Exercice 13 : soit E de dimension 3 et F et G deux sev avec $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 2$. Montrer que soit $F \subset G$, soit $F \oplus G = E$ (faire un dessin pour expliquer).

A savoir faire

1. Savoir montrer qu'une partie d'un $\mathbb{K}$-ev est un sev.
2. Savoir vérifier qu'une famille est libre/liée, génératrice ou non, une base ou non.
3. Savoir écrire un sev comme un Vect pour trouver une base.
4. Savoir montrer que deux sev sont en somme directe.
5. Savoir montrer que deux sev sont supplémentaires en utilisant une analyse-synthèse.
6. Connaître les formules de dénombrement.
7. Savoir modéliser une situation de dénombrement par des tirages successifs avec/sans remise ou simultanés.
8. Connaître les formules de dénombrement.
9. Savoir déterminer la dimension dun sev.
10. Savoir montrer que deux sev sont supplémentaires en utilisant des bases/les dimensions.
11. Savoir calculer le rang dune famille de vecteurs.