Colles 26 - 13/05/2024 au 17/05/2024

Thèmes traités en classe

- Chapitre 23 : Probabilités.
  Exercices traités en cours : I.1, I.2, I.3, I.4, I.6, II.2, II.4, II.5, III.3, IV.1.
- Chapitre 24 : Applications linéaires.
  1. Définitions, vocabulaire.
  2. Opérations sur les applications linéaires.
  3. Noyau, image, injectivité, surjectivité.
  4. Endomorphismes remarquables : homothéties, projecteurs, symétries.
  5. Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité avec l'image d'une base.
  6. Une application linéaire est complètement déterminée par l'image d'une base.
  7. Isomorphisme et dimension.
  8. Rang d'une application linéaire : définition et propriétés.
  9. Théorème du rang.
  10. Bijectivité automatique en dimension finie.
  11. Ensemble des solutions d'une équation linéaire, application aux suites récurrentes d'ordre 2.
  12. Formes linéaires et hyperplans.

  Exercices traités en cours : I.2, I.3, I.4, I.5, I.6, I.8, I.10, II.1, III.1, III.5.

Questions de cours

- C22 Exercice 17 : soit$n \geq 1$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
  1. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.
  2. Montrer que $\mathscr{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
  3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{L}$.
- Définition de probabilité conditionnelle sachant un événement. Montrer que si $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec $P(B) > 0$, alors P_B est une probabilité sur Ω.
- Énoncer les trois formules sur les probabilités conditionnelles. Démontrer la formule des probabilités composées.
- Donner la définition de système complet d'événements puis énoncer la formule des probabilités totales. Exercice II.5 : on a n urnes numérotées de 1 à n et l'urne i contient i boules blanches et $n - i$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire successivement deux boules avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?
- C23 Exercice III.3 : $2n$ lancers d'une pièce avec probabilité $\dfrac{2}{3}$ de tomber sur face. Exprimer A : « on obtient une alternance parfaite de piles et de faces », B : « on obtient un seul pile » et C : « on n'a jamais pile suivi de face » à l'aide d'évènements plus simples puis calculer les probabilités de A et de B.
- Montrer que la composée de deux applications linéaires est linéaire, puis que la réciproque d'un isomorphisme est linéaire.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Donner les définitions de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $\ker(f)$ est un sev de E.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $f(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
- C24 Exercice I.8 : soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.
- Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui à f associe la fonction $\varphi(f) : x \mapsto f(-x)$ est une symétrie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. En déduire que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- C24 Exercice III.5 : soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n\}$.
  - ▹ Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
  - ▹ Montrer que l'application $\varphi : u \in E \mapsto (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme.

  - ▷ En déduire la dimension puis une base de E.
- Soit E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $\ker(u)$ est un hyperplan de E.
- Soit E de dimension finie et H un hyperplan de E et D une droite qui n'est pas contenue dans H. Alors $E = H \oplus D$.
- C23 Exercice I.6 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  - ▷ Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \subset \ker(f - \mathrm{id}_E)$.
  - ▷ Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.

A savoir faire

1. Savoir décomposer un évènement comme une union/intersection d'évènements plus simples.
2. Savoir appliquer la formule des probabilités composées.
3. Savoir appliquer la formule des probabilités totales en utilisant un SCE.
4. Connaître la notion d'indépendance et savoir l'utiliser pour calculer la probabilité d'une intersection.
5. Savoir montrer qu'une application est linéaire/est un endomorphisme.
6. Savoir déterminer une base du noyau/de l'image d'une application linéaire.
7. Savoir déterminer l'expression d'une projection, d'une symétrie.
8. Savoir vérifier qu'un endomorphisme est une projection/une symétrie et trouver ses sous-espaces caractéristiques.
9. Savoir appliquer le théorème du rang.
10. Savoir utiliser une forme linéaire pour justifier qu'un sous-ensemble est un hyperplan.