Colles 27 - 20/05/2024 au 24/05/2024

Thèmes traités en classe

- Chapitre 24 : Applications linéaires.
  Exercices traités en cours : I.2, I.3, I.4, I.5, I.6, I.8, I.10, II.1, III.1, III.5, II.2, II.7, III.2, III.3, III.6, III.10, III.11, III.14, III.18.
- Chapitre 25 : Intégration.
  1. Intégrale des fonctions en escaliers.
  2. Intégrale des fonctions continues sur un segment.
  3. Propriétés : linéarité, Chasles, croissance et positivité.

  Exercices traités en classe : II.1, II.2, II.3, II.4, II.6, II.8, II.9, II.10.

Questions de cours

- Montrer que la composée de deux applications linéaires est linéaire, puis que la réciproque d'un isomorphisme est linéaire.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Donner les définitions de $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. Montrer que $\ker(f)$ est un sev de E.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $f(\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_n)) = \operatorname{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$.
- C24 Exercice I.8 : soit $f,g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f\circ g = g\circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g.
- Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui à f associe la fonction $\varphi(f) : x \mapsto f(-x)$ est une symétrie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. En déduire que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- C24 Exercice III.5 : soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n\}$.
  - ▷ Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
  - ▷ Montrer que l'application $\varphi : u \in E \mapsto (u_0,u_1,u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme.
  - ▷ En déduire la dimension puis une base de E.
- Soit E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $\ker(u)$ est un hyperplan de E.
- Soit E de dimension finie et H un hyperplan de E et D une droite qui n'est pas contenue dans H. Alors $E = H \oplus D$.
- C24 Exercice I.6 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  - ▷ Montrer que $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Im}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \subset \ker(f - \mathrm{id}_E)$.
  - ▷ Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.
- C24 Exercice III.6 : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0,\dots,a_n$ des réels distincts. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P) = (P(a_0),\dots,P(a_n))$.
  1. Montrer que ϕ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
  2. Quelle est l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par ϕ^{-1} ?
- C24 Exercice III.10 : soit E un espace vectoriel de dimension n et f une forme linéaire sur E. On prend $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.
  1. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Vect}(a)$.
  2. On suppose que $f(a) = 1$ et on pose pour tout $x \in E$, $p(x) = f(x)a$.
     Montrer que p est un projecteur de E et déteminer ses éléments caractéristiques.
- C24 Exercice III.11 : soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$ et en donner une base.
- C25 Exercice II.4 :
  1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$.
  2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
  3. Déterminer la limite et un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$.

- C25 Exercice II.9 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.
  1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
  2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire que $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
  3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$ et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

A savoir faire

1. Savoir montrer qu'une application est linéaire/est un endomorphisme.
2. Savoir déterminer une base du noyau/de l'image d'une application linéaire.
3. Savoir déterminer l'expression d'une projection, d'une symétrie.
4. Savoir vérifier qu'un endomorphisme est une projection/une symétrie et trouver ses sous-espaces caractéristiques.
5. Savoir appliquer le théorème du rang.
6. Savoir utiliser une forme linéaire pour justifier qu'un sous-ensemble est un hyperplan.
7. Savoir calculer une intégrale.
8. Savoir encadrer une intégrale.