Colles 28 - 27/05/2024 au 31/05/2024

Thèmes traités en classe

- Chapitre 24 : Applications linéaires.
  Exercices traités en cours : I.2, I.3, I.4, I.5, I.6, I.8, I.10, II.1, III.1, III.5, II.2, II.7, III.2, III.3, III.6, III.10, III.11, III.14, III.18.
- Chapitre 25 : Intégration.
  1. Intégrale des fonctions en escaliers.
  2. Intégrale des fonctions continues sur un segment.
  3. Propriétés : linéarité, Chasles, croissance et positivité.
  4. Théorème fondamental de l'analyse.
  5. Formule de l'IPP et du changement de variable.
  6. Intégrale d'une fonction périodique sur une période, intégrale d'une fonction paire/impaire.
  7. Sommes de Riemann.
  8. Inégalité de Taylor-Lagrange.

  Exercices traités en classe : II.1, II.2, II.3, II.4, II.6, II.8, II.9, II.10, II.11, II.12, II.15, III.1, III.2, IV.1.
- Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires.
  1. Application linéaire canoniquement associée à une matrice : définition, linéarité.
  2. Noyau et image d'une matrice, opérations élémentaires.
  3. Retour sur les systèmes linéaires.

Questions de cours

- C24 Exercice III.6 : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$.
  1. Montrer que ϕ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
  2. Quelle est l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par ϕ^{-1} ?
- C24 Exercice III.10 : soit E un espace vectoriel de dimension n et f une forme linéaire sur E. On prend $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.
  1. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Vect}(a)$.
  2. On suppose que $f(a) = 1$ et on pose pour tout $x \in E$, $p(x) = f(x)a$.
     Montrer que p est un projecteur de E et déteminer ses éléments caractéristiques.
- C24 Exercice III.11 : soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$ et en donner une base.
- C25 Exercice II.4 :
  1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$.
  2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
  3. Déterminer la limite et un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$.
- C25 Exercice II.9 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.
  1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
  2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire que $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
  3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$ et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

- C25 Exercice II.11 : Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t}$ en utilisant la fonction $P : x \mapsto \int_a^b (xf(t)+g(t))^2\mathrm{d}t$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \geq 0$. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$ et si f est paire, $\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.
- C25 Exercice II.10 (fait en cours) : soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Exemple du cours : calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ en utilisant des sommes de Riemann.
- C25 Exercice IV.1.3 : en appliquant Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, calculer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
- Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice. Montrer que c'est une application linéaire.
- Donner la définition de noyau et image d'une matrice. Montrer que l'image d'une matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes.

A savoir faire

1. Savoir montrer qu'une application est linéaire/est un endomorphisme.
2. Savoir déterminer une base du noyau/de l'image d'une application linéaire.
3. Savoir déterminer l'expression d'une projection, d'une symétrie.
4. Savoir vérifier qu'un endomorphisme est une projection/une symétrie et trouver ses sous-espaces caractéristiques.
5. Savoir appliquer le théorème du rang.
6. Savoir utiliser une forme linéaire pour justifier qu'un sous-ensemble est un hyperplan.
7. Savoir calculer une intégrale.
8. Savoir encadrer une intégrale.
9. Savoir utiliser le théorème fondamental de l'analyse.
10. Savoir calculer la limite d'une somme de Riemann.
11. Savoir appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
12. Savoir déterminer l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
13. Savoir déterminer le noyau et l'image d'une matrice.