

Chapitre 27 : Variables aléatoires

Dans tout le chapitre, (Ω, P) est un espace probabilisé fini : c'est l'univers d'une expérience aléatoire.

I. Variables aléatoires et lois de probabilité

I.1. Variables aléatoires et événements

Définition I.1. Une **variable aléatoire** sur Ω à valeurs dans un ensemble E est une fonction $X : \Omega \rightarrow E$. On note alors $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X .

Exemple I.1. Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement et avec remise 4 boules. On note alors X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées à la fin de l'expérience. Au minimum, on aura tiré 0 boule blanche et au maximum 4 boules blanches. Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles. Ainsi $X(\Omega) = \llbracket 0, 4 \rrbracket$.

Définition I.2. Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire.

- Si $A \subset E$, on note $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$ l'évènement $X^{<-1>}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.
- Lorsque $x \in E$, on note $(X = x)$ au lieu de $(X \in \{x\})$. C'est l'évènement « X prend la valeur x ».
- Si $E = \mathbb{R}$, on note aussi $(X \leq x)$ au lieu de $(X \in]-\infty, x])$. C'est l'évènement « X prend une valeur inférieure ou égale à x ».

Exemple I.2. On reprend l'exemple I.1.

- L'évènement « on a tiré une seule boule blanche » s'écrit $(X = 1)$.
- L'évènement « on a tiré au moins une boule blanche » s'écrit $(X \geq 1)$. Son contraire est $(X < 1) = (X = 0)$: « on n'a pas tiré de boule blanche ».
- L'évènement « on a tiré entre une et trois boules blanches » s'écrit $(1 \leq X \leq 3)$.

Proposition I.1. Soit X une variable aléatoire sur Ω . La famille d'évènements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'évènements de Ω .

I.2. Loi de probabilité

Définition I.3. Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) à valeurs dans E . La **loi de probabilité** de X est l'application

$$\begin{array}{ccc} P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) & \rightarrow & [0, 1] \\ A & \mapsto & P(X \in A). \end{array}$$

C'est une probabilité sur $X(\Omega)$

Proposition I.2. Soit X une variable aléatoire sur Ω . La famille $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilité sur $X(\Omega)$. Elle détermine complètement la loi de X .

Méthode. Pour déterminer la loi de probabilité de X , il suffit de donner :

- l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ;
- les probabilités $P(X = x)$, pour tout $x \in X(\Omega)$.

Exemple I.3. On reprend l'exemple I.1. On a toujours $X(\Omega) = \llbracket 0, 4 \rrbracket$. Puis, pour tout $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}$.

En effet, il y a $\binom{4}{k}$ tirages qui donnent k boules blanches et chacun a pour probabilité $\left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}$. Donc la loi de X est :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

Notation I.1. Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans un même ensemble E , on note $X \sim Y$ si $P_X = P_Y$. En particulier, X et Y prennent les mêmes valeurs, mais ne sont pas forcément définies sur le même univers.

Définition I.4. Soit X une variable aléatoire sur Ω et A un évènement de Ω tel que $P(A) > 0$. On appelle **loi conditionnelle de X sachant A** la loi de X pour la probabilité P_A , c'est-à-dire l'application $B \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \mapsto P_A(X \in B) \in [0, 1]$.

I.3. Image d'une variable aléatoire par une fonction

Définition I.5. Soit X une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On note $f(X)$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad f(X)(\omega) = f(X(\omega)).$$

C'est l'**image de X par f** .

Proposition I.3. En notant $Y = f(X)$, on a $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ et $\forall y \in Y(\Omega), P(Y = y) = P(X \in f^{<-1>}(\{y\}))$.

Exemple I.4. Reprenons l'exemple I.1. Considérons la variable aléatoire $Y = X^2 - 2X$. Lorsque X prend les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4, Y prend les valeurs 0, -1, 0, 3 et 8. La loi de Y est donc :

k	-1	0	3	8
$P(X = k)$	$\frac{216}{625}$	$\frac{297}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

Proposition I.4. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

II. Loïs usuelles

II.1. Loi certaine

Définition II.1. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi certaine** s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$.

II.2. Loi uniforme

Définition II.2. Soit E un ensemble fini de cardinal n . On dit que X suit une **loi uniforme** sur E , et on note $X \sim \mathcal{U}(E)$, si $X(\Omega) = E$ et

$$\forall x \in E, P(X = x) = \frac{1}{n}.$$

Exemple II.1. La variable aléatoire qui donne le résultat du lancer d'un dé équilibré suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

II.3. Loi de Bernoulli

Définition II.3. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$, et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p.$$

Remarque II.1. Une épreuve de Bernoulli est une expérience qui n'a que deux issues : le succès (avec probabilité p) ou l'échec (avec probabilité $1 - p$).

Si X est une variable aléatoire qui vaut 1 lorsque l'épreuve est un succès et 0 sinon, alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

- Exemples II.2.**
1. La variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient pile lors d'un lancer d'une pièce équilibrée et 0 sinon suit la loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
 2. On tire au hasard une boule dans une urne qui contient a boules rouges et b boules bleues. On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 lorsqu'on tire une boule rouge et 0 sinon. Alors $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{a}{a+b}\right)$.
 3. Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(P(A))$.

II.4. Loi binomiale

Définition II.4. Soit X une variable aléatoire et $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p , et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque II.2. Si on réalise une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p , alors la variable aléatoire qui compte le nombre total de succès suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Par exemple, lorsqu'on réalise n tirages avec remise dans une urne qui contient une proportion p de boules blanches, alors la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues suit $\mathcal{B}(n, p)$.

- Exemples II.3.**
1. On lance n fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de piles obtenus. Alors $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
 2. Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires. On tire successivement et avec remise 10 boules et on note X le nombre de boules blanches tirées.
On a ici 10 répétitions indépendantes (car il y a remise) de l'épreuve de Bernoulli : on tire une boule. Le succès est : la boule tirée est blanche, dont la probabilité est $\frac{1}{3}$.
Ainsi $X \sim \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$.

III. Espérance, variance et écart-type

III.1. Espérance

Définition III.1. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ une variable aléatoire. L'**espérance** de X est le nombre :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

Si $E(X) = 0$, on dit que X est une variable **centrée**.

Remarques III.1.

- L'espérance de X s'interprète comme la valeur moyenne prise par X lors d'un grand nombre de répétitions de l'expérience. En effet, la fréquence d'apparition de chaque valeur x de X est environ égale à la probabilité $P(X = x)$, et l'espérance consiste à faire la moyenne du tableau valeurs/fréquences :

valeur	x_1	x_2	...	x_n	Moyenne
fréquence	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$	$x_1 P(X = x_1) + \dots + x_n P(X = x_n)$

L'espérance est un indicateur de position.

- Si $X \sim Y$, alors $E(X) = E(Y)$.

Exemple III.1. Reprenons l'exemple I.1. On a :

$$E(X) = 0 \times \frac{81}{625} + 1 \times \frac{216}{625} + 2 \times \frac{216}{625} + 3 \times \frac{96}{625} + 4 \times \frac{16}{625} = \frac{8}{5}.$$

Ainsi, si on répète beaucoup de fois les tirages, on aura en moyenne 1,6 boules blanches par expérience.

Proposition III.1. Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. L'espérance est linéaire : pour tous $a, b \in \mathbb{K}$, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
2. Inégalité triangulaire : $|E(X)| \leq E(|X|)$.

Proposition III.2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω .

1. L'espérance est positive : si X ne prend que des valeurs positives, alors $E(X) \geq 0$.
2. L'espérance est croissante : si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Proposition III.3. 1. Si X suit la loi certaine de valeur a alors $E(X) = a$.

2. Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ et $n = b - a + 1$, alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$.
3. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$.
4. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.

Exemple III.2. Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

Théorème III.4 (Formule de transfert)

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

Remarque III.2. On n'a donc pas besoin de connaître la loi de $f(X)$ pour trouver son espérance.

Théorème III.5 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives. Pour tout $a > 0$,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

III.2. Variance et écart-type

Définition III.2. Soit X une variable aléatoire réelle. La **variance** de X est le réel :

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

L'**écart-type** de X est le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Lorsque $V(X) = 1$, on dit que X est **réduite**.

Remarques III.3. • Si $X \sim Y$, alors $V(X) = V(Y)$.

- La variance mesure la moyenne des carrés des écarts de X à sa moyenne. C'est un indicateur de dispersion.

Théorème III.6 (Formule de Huygens)

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Exemple III.3. Reprenons l'exemple I.1. Nous avons déjà calculé $E(X) = \frac{8}{5}$. En utilisant la formule de transfert, on trouve $E(X^2) = \frac{88}{25}$. Donc $V(X) = \frac{88}{25} - \frac{64}{25} = \frac{24}{25}$.

Proposition III.7. 1. Si X suit une loi certaine, alors $V(X) = 0$.

2. Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$.

3. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $V(X) = p(1 - p)$.

4. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $V(X) = np(1 - p)$.

Remarque III.4. Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Théorème III.8 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle et $a \in]0, +\infty[$, alors $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

Remarque III.5. Ainsi, lorsque plus la variance de X est petite, plus la probabilité que X soit éloigné de sa moyenne est petite.

IV. Couples de variables aléatoires

IV.1. Loi conjointe, lois marginales

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires. Le couple (X, Y) est une variable aléatoire sur $\Omega : (X, Y) : \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in E \times F$. On notera en général $P(X = x, Y = y)$ à la place de $P((X, Y) = (x, y))$.

Définition IV.1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω .

1. La **loi conjointe** de X et Y est la loi du couple (X, Y) . Elle est déterminée par la distribution de probabilité $(P(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
2. Les lois de X et Y sont appelées les **lois marginales** du couple (X, Y) .

Remarque IV.1. On peut généraliser ces définitions à un n -uplet de variables aléatoires!

Proposition IV.1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω . Les lois marginales sont données par :

$$\begin{aligned} \forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \\ \forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) \end{aligned}$$

Remarque IV.2. Attention : on ne peut pas en général retrouver la loi conjointe à partir des lois marginales!

Proposition IV.2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs réelles sur Ω et $Z = X + Y$. La loi de Z est donnée par :

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P(Z = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = z - x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = z - y, Y = y).$$

IV.2. Indépendance

Définition IV.2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω . On dit que X et Y sont **indépendantes**, et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants : $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

Proposition IV.3. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω .

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Remarque IV.3. Lorsque X et Y sont indépendantes, les lois marginales suffisent pour retrouver la loi conjointe de (X, Y) .

Proposition IV.4. Soient $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ et $f : E \rightarrow E'$ et $g : F \rightarrow F'$. Alors si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Proposition IV.5. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω et à valeurs réelles. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Remarque IV.4. Attention, la réciproque est fausse!

Définition IV.3. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω . On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $A_1 \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)), \dots, A_n \in \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, les événements $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition IV.6. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω . Elles sont mutuellement indépendantes ssi pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n).$$

Remarque IV.5. Si des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes, mais la réciproque n'est pas vraie.

Proposition IV.7. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$ et mutuellement indépendantes, alors $E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_n)$.

Proposition IV.8. Soit $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \sim \mathcal{B}(p)$. Alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Remarque IV.6. On retrouve plus facilement que si $S \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $E(S) = np$

Proposition IV.9 (Lemme des coalitions). Soit $n \geq 2$. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$. Soit $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $f : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ et $g : E_{m+1} \times \dots \times E_n \rightarrow F'$. Alors si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque IV.7. Cette proposition est encore valable si on fait plus de deux coalitions.

IV.3. Covariance

Définition IV.4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω . La **covariance** de X et Y est le réel $\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.

On dit que X et Y sont **décorrélées** si $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Proposition IV.10. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω .

1. $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$;
2. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$;
3. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors X et Y sont décorrélées : en particulier, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarques IV.8. • Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles sur Ω , alors $V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$.

- Attention, deux variables décorrélées ne sont pas forcément indépendantes!
- On retrouve facilement la variance de la loi binomiale.