Colles 29 - 03/06/2024 au 07/06/2024

Thèmes traités en classe

- Chapitre 25 : Intégration.
Exercices traités en classe : II.1, II.2, II.3, II.4, II.6, II.8, II.9, II.10, II.11, II.12, II.15, III.1, III.2, IV.1.
- Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires.
  1. Application linéaire canoniquement associée à une matrice : définition, linéarité.
  2. Noyau et image d'une matrice, opérations élémentaires.
  3. Retour sur les systèmes linéaires.
  4. Matrice d'une application linéaire dans des bases.
  5. Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, où $p=\dim(E)$ et $n=\dim(F)$.
  6. Matrice de $f(x)$, matrice de $f\circ g$.
  7. Changement de bases, matrices semblables/équivalentes.
  8. Les différents rangs.

  Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 5, 6, 11, 12, 17.

Questions de cours

- C25 Exercice II.11 : Soient $f,g\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|\leq\sqrt{\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t}$ en utilisant la fonction $P:x\mapsto\int_a^b (xf(t)+g(t))^2\mathrm{d}t$.
- Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.
- Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $a\geq 0$. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t=0$ et si f est paire, $\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.
- C25 Exercice II.10 (fait en cours) : soit $f\in C^1([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
- Exemple du cours : calculer la limite lorsque $n\to+\infty$ de $u_n=\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ en utilisant des sommes de Riemann.
- C25 Exercice IV.1.3 : en appliquant Taylor-Lagrange à la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$, calculer la limite de la suite $u_n=\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
- Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice. Montrer que c'est une application linéaire.
- Donner la définition de noyau et image d'une matrice. Montrer que l'image d'une matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes.
- Soit $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $x\in E$. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x))=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$.
- Donner la définition de matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$, énoncer puis démontrer la formule de changement de base pour une application linéaire.
- C26 Exercice 11 : Montrer que $P=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.
- C26 Exercice 12 : soit E de dimension n et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^{n-1}\neq 0$ et $f^n=0$.
  - ▹ Justifier qu'il existe $x\in E$ tel que $(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x))$ est une base de E.
  - ▹ Donner la matrice de f dans cette base.

- C26 Exercice 17 : soit E de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
  - ▹ Déterminer une base de $F = \ker(f - \mathrm{id}_E)$, $G = \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $H = \ker(f + 4\,\mathrm{id}_E)$.
  - ▹ Déterminer une base $\mathscr{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale et préciser les matrices de passage entre $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et la relation entre toutes ces matrices.

A savoir faire

1. Savoir calculer une intégrale.
2. Savoir encadrer une intégrale.
3. Savoir utiliser le théorème fondamental de l'analyse.
4. Savoir calculer la limite d'une somme de Riemann.
5. Savoir appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
6. Savoir déterminer l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
7. Savoir déterminer le noyau et l'image d'une matrice.
8. Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases.
9. Savoir faire un changement de bases.