Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires

Dans tout le chapitre, E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

I. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

I.1. Définition

Soit p, n deux entiers naturels non nuls. On peut identifier $\mathbb{K}^p$ à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ grâce à l'isomorphisme : $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. De même on identifie $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition I.1. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut donc définir l'application :

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

On appelle φ_A **l'application linéaire canoniquement associée** à A.

Proposition I.1. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application φ_A est linéaire.*

I.2. Noyau et image d'une matrice

Définition I.2. On appelle **noyau de** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, noté $\ker(A)$ le sev de $\mathbb{K}^p$:

$$\ker(A) = \ker(\varphi_A) = \{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0_n\}.$$

Remarque I.1. Le noyau d'une matrice n'est **jamais vide**. Le vecteur nul est toujours dans le noyau.

Définition I.3. On appelle **image de** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $\mathrm{Im}(A)$ le sev de $\mathbb{K}^n$:

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\varphi_A) = \{Y \in \mathbb{K}^n \mid \exists X \in \mathbb{K}^p, Y = AX\}.$$

Le **rang de** A est l'entier : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi_A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Proposition I.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, \ldots, C_p \in \mathbb{K}^n$ ses vecteurs colonnes*

1. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$.
   En particulier, le rang de A est égal au rang de la famille de vecteur $C_1, \ldots, C_p$.
2. $\dim(\ker(A)) \leq p$ *et* $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$
3. $\mathrm{rg}(A) + \dim(\ker(A)) = p$.

I.3. Opérations élémentaires, noyau et image

Proposition I.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

1. *Si $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est obtenue à partir de A en faisant des opérations élémentaires sur les lignes, alors* $\ker(B) = \ker(A)$.
2. *Si $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est obtenue à partir de A en faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, alors* $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Im}(A)$.
3. *On a* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(C)$.

Méthode. 1. Pour déterminer une base de $\ker(A)$ on échelonne le système $AX = 0_n$.

2. Pour obtenir des équations de $\mathrm{Im}(A)$, on échelonne le système $AX = B$: on obtient alors des équations sur les coordonnées de B pour que le système soit compatible.
3. Pour déterminer le rang d'une matrice A, on effectue le pivot de Gauss pour se ramener à une matrice échelonnée et on compte le nombre de pivots de celle-ci.

Proposition I.4. *Soit* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.

Remarque I.2. C'est dire d'une autre façon qu'on peut faire le pivot de Gauss sur les lignes ou sur les colonnes pour trouver le rang de A.

I.4. Systèmes linéaires (bis)

On rappelle qu'un système linéaire peut se mettre sous forme matricielle $AX = B$ où $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice des coefficients du système et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est le second membre.

Définition I.4. Le **rang** d'un système est égal au rang de sa matrice.

Proposition I.5. *Soit* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. *Le rang de A est égal au nombre d'inconnues principales du système* $AX = 0_n$.
2. *Le système* $AX = B$ *est compatible ssi* $B \in \mathrm{Im}(A)$.
3. *Si* $B \in \mathrm{Im}(A)$ *avec* $AX_0 = B$. *L'ensemble des solutions de* $AX = B$ *est :*

$$X_0 + \ker(A) = \{X_0 + X_H, X_H \in \ker(A)\}.$$

En particulier, si $B = 0_n$, *alors l'ensemble des solutions est un sev de* $\mathbb{K}^p$ *de dimension* $p - \mathrm{rg}(A)$, *qui est le nombre de paramètres du système.*

II. Des applications linéaires aux matrices

II.1. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition II.1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. La matrice de $(x_1, \dots, x_p)$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_p) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$.

Autrement dit, si pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on décompose $x_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_p) = (m_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$.

Proposition II.1. *Soit* $\mathscr{F}$ *une famille finie de vecteur de* E *et* $\mathscr{B}$ *une base de* E. *Alors* $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$.

II.2. Matrice d'une application linéaire dans une base

Définition II.2. Soit $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. La **matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$, est la matrice dont les p colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_p)$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = (m_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ avec pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i$.

Remarque II.1. Si $E = F$ et on prend la même base $\mathscr{B}$ au départ et à l'arrivée, on note en général $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice obtenue.

Proposition II.2. *L'application :*

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, $\dim \mathscr{L}(E,F) = np$.
Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, on dit que* $\Phi^{-1}(A)$ *est l'**application linéaire associée à*** A *dans les bases* $\mathscr{B}_E$ *et* $\mathscr{B}_F$.

Proposition II.3. *Soit* $f \in \mathscr{L}(E,F)$*,* $x \in E$ *et* $y \in F$*. On a*

$$y = f(x) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x).$$

Remarque II.2. Ainsi, pour trouver les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathscr{B}_F$, il suffit de multiplier les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}_E$ par M.

Proposition II.4. *Soit* $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $g \in \mathscr{L}(F,G)$*. Prenons* $\mathscr{B}_E$*,* $\mathscr{B}_F$ *et* $\mathscr{B}_G$ *des bases de* E, F *et* G.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

En particulier, f *est inversible ssi* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ *est inversible et alors* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)^{-1}$.

Théorème II.5

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. On a l'équivalence entre :*

1. A *est inversible.*
2. φ_A *est un isomorphisme.*
3. $\ker(A) = \{0_n\}$.
4. $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$.
5. $\mathrm{rg}(A) = n$.
6. *La famille des colonnes* $(C_1, \dots, C_n)$ *de* A *est libre.*

On dit alors que le système $AX = B$ *est de Cramer.*

Corollaire II.6. *Soit* $\mathscr{F}$ *une famille finie de vecteurs de* E*.* $\mathscr{F}$ *est une base de* E *ssi* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ *est inversible.*

Corollaire II.7. *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *S'il existe* $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $BA = I_n$*, alors* A *est inversible et* $A^{-1} = B$.
2. *S'il existe* $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $AC = I_n$*, alors* A *est inversible et* $A^{-1} = C$.

Proposition II.8. *Une matrice triangulaire est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont non nuls.*

II.3. Exemples

Définition II.3. Soit (e_1, e_2) la base canonique du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation d'angle θ centrée en l'origine est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\begin{cases} r_\theta(e_1) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 \\ r_\theta(e_2) = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2 \end{cases}$$

En particulier, $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On considère E de dimension n.

Proposition II.9. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$$

Proposition II.10. *Soient F et G deux sev supplémentaires de E de dimensions r et $n-r$. Soient $\mathscr{B}_F$ une base de F, $\mathscr{B}_G$ une base de G et $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ la base de E correspondante.*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\Pi_{F,G}) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}, \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_{F,G}) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

II.4. Changement de bases

On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = I_p$, mais $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$ n'est pas la matrice identité si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ne sont pas les mêmes.

Définition II.4. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E. La **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$.
Autrement dit, les colonnes de $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$: $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Remarque II.3. La matrice $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ car $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = I_p$.

Proposition II.11. *Soit $x \in E$. On note $(x_1, \dots, x_p)$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ et $(x'_1, \dots, x'_p)$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$. Alors*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$$

Théorème II.12

Soient $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}'_E$ deux bases de E et $\mathscr{B}_F, \mathscr{B}'_F$ deux bases de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Notons $P = P_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}'_E}$ et $Q = P_{\mathscr{B}_F}^{\mathscr{B}'_F}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = Q^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)P.$$

Remarque II.4. En particulier, si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ sont deux bases de E avec $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P$.

Définition II.5.
1. Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **équivalentes** s'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $B = QAP$.
2. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

II.5. Les différents rangs

Théorème II.13

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\right).$$

Proposition II.14. *Soient* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $D \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.

1. $\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$;
2. $\mathrm{rg}(AD) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(CA)$.