Matrices et applications linéaires - Exercices

Exercice 1. Pour chaque matrice, déterminer l'application linéaire canoniquement associée puis son noyau, son rang et son image.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Pour chaque application linéaire, déterminer sa matrice dans les bases canoniques, puis dire si l'application est injective, surjective, bijective.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y)$;
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$;
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, x - z, x + z)$.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son application linéaire canoniquement associée.

1. Déterminer l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = 4u$.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = 2u$.
3. Soit $e_2 \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tel que $f(e_2) = 2e_2$. Déterminer un vecteur $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(e_3) = 2e_3 + e_2$.
4. Justifier qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit l'application linéaire $f_m(x, y, z) = (mx + y + (2m - 1)z, x + (1 - m)y, x - y + (2 - m)z)$.

1. Déterminer la matrice A canoniquement associée à f_m.
2. Pour quelles valeurs de m la rang de A vaut-il 3 ? Que peut-on dire de f_m dans ce cas ?
3. Déterminer le noyau de A en fonction de m.

Exercice 5.
1. Soit $\varphi : P \in \mathbb{C}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{C}_3[X]$. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques.
2. Soit $\psi : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{C}$. Déterminer la matrice de ψ dans les bases canoniques.
3. Soit $P_1 = 3X + 2$ et $P_2 = 2X + 3$. Montrer que (P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_1[X]$ et donner la matrice de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_1[X])$ définie par $f(P) = P'$ dans cette base.

Exercice 6. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P) = (X^2 - X + 1)P' - (2X - 1)P + X^2 P(1)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Est-ce que φ est un automorphisme ?

Exercice 7. On considère l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_m[X]$ dont la matrice dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Que valent m et n ?
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer l'expression de $f(P)$.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par $\varphi(M) = AM - MA$.
Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9. Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $d : f \in E \mapsto f' \in E$. On note $F = \mathrm{Vect}(\sin,\cos,\mathrm{ch},\mathrm{sh})$.

1. (a) Donner la dimension de F et montrer que F est stable par d. On note $\varphi \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme induit par d.
   (b) Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathscr{B} = (\sin,\cos,\mathrm{ch},\mathrm{sh})$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que φ est un automorphisme et écrire M^{-1}.
2. Déterminer $\ker(\varphi - \mathrm{id}_F)$ et $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{id}_F)$ en utilisant M.
   En déduire les solutions dans F de $y' - y = \mathrm{e}^{-t} + \sin(t)$.

Exercice 10. 1. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ définit par $\varphi(P) = P(X+1)$. Donner la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ puis calculer A^{-1}.

2. Soit $\psi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_6[X])$ définit par $\psi(P) = P(1-X)$. Donner la matrice B de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_6[X]$ puis calculer B^{-1}.

Exercice 11. 1. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

2. Montrer que $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.

Exercice 12. Soit E de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
2. On se donne un tel x. Montrer que $\mathscr{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 13. Soient $u = (0,1,1)$, $v = (2,0,-1)$ et $w = (2,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $z = (4,-1,1)$. Déterminer les coordonnées de z dans la base (u, v, w).
3. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base (u, v, w) sont $(-1,-8,4)$. Déterminer les coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. On pose $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,-1,0)$ et $f_3 = (1,0,1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. En déduire A^n.

Exercice 15. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P) = P + (X-a)P' + (X-a)^2 P''$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. 1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et p un projecteur de E. On pose $r = \mathrm{rg}(p)$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$.

Soit $s \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ la symétrie par rapport au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à la droite $\mathscr{D} = \mathrm{Vect}((-1,-1,1))$.

2. Écrire la matrice de s dans une base adaptée à la somme directe $\mathscr{P} \oplus \mathscr{D}$.
3. En déduire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base et la dimension de $F = \ker(f - \mathrm{id}_E)$, $G = \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $H = \ker(f + 4\,\mathrm{id}_E)$.
2. Déterminer une base $\mathscr{C}$ de E dans laquelle la matrice D de f est diagonale.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de A^n faisant intervenir les matrices de passages de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.

Exercice 18 (CCP PC 2018). On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Donner une base de $\mathrm{Im}(A)$.
2. Donner une base de $\ker(A)$.
3. Déterminer $(Q, P) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tel que $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer la dimension de $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MA = 0_{3,4}\}$.

Exercice 19. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice non nulle telle que $M^2 = 0_2$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 20 (Mines-Ponts PC 2018). Soit $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, $F_0 = 1$ et $F_k = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (F_0, F_1, \dots, F_n)$ est une base de E_n.
2. Pour tout $P \in E_n$, on pose $\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n.
3. Donner la matrice de Φ dans la base $\mathscr{B}$.
4. Soit $Q \in E_{n-1}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E_n$ tel que $\Phi(P) = Q$ et $P(0) = 0$.
5. On prend $n = 3$ et $Q = X^2$.
   (a) Exprimer Q dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En déduire P tel que $\Phi(P) = X^2$ et $P(0) = 0$.
   (c) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{m} k^2$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Indications - Solutions

Exercice 1 :

1. $\varphi_A(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$, $\ker(A) = \{(-y-z, y, z),\ y,z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$, $\text{rg}(A) = 1$ et $\text{Im}(A) = \text{Vect}((1,1,1))$.
2. $\varphi_B(x,y,z) = (-x+y+z, 3x-2y-4z, -2x+y+3z)$, $\ker(B) = \text{Vect}((-2,-1,-1))$, $\text{rg} = 2$ et $\text{Im}(B) = \text{Vect}((-1,3,-2),(1,-2,1)))$.
3. $\varphi_C(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$, $\ker(C) = \{0\}$, $\text{rg}(C) = 3$ et $\text{Im}(C) = \mathbb{R}^3$.
4. $\varphi_D(x,y,z,t) = (y-t, x+z, -y-t, -x-z)$, $\ker(D) = \text{Vect}((1,0,-1,0))$, $\text{rg}(D) = 3$ et $\text{Im}(D) = \text{Vect}((0,1,0,-1),(1,0,-1,0),(-1,0,-1,0))$.

Exercice 2 :

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ qui est inversible, donc f est bijective.
2. $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est inversible, donc f est bijective.
3. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2, donc f est injective mais pas surjective.
4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2, donc f est surjective mais pas injective.
5. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2, donc f n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 3 :

1. On résout l'équation $AX = 4X$, on trouve $\text{Vect}((1,0,1))$.
2. $\text{Vect}((1,2,-1))$.
3. Prenons $e_2 = (1,2,-1)$. On résout $AX - 2X = e_2$. On trouve $e_3 = (0,1,0)$.
4. On prend la base (e_1, e_2, e_3) !

Exercice 4 :

1. $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m-1 \\ 1 & 1-m & 0 \\ 1 & -1 & 2-m \end{pmatrix}$
2. Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,2\}$.
3. Pour $m = 2$, $\ker(A) = \text{Vect}((-1,-1,1))$. Pour $m = 0$, $\ker(A) = \text{Vect}((-1,1,1))$. Pour $m = -1$, $\ker(A) = \text{Vect}((-2,1,1))$. Sinon, $\ker(A) = \{0\}$.

Exercice 5 :

1. $\text{Mat}_{\text{can}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\text{Mat}_{\text{can}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$.
3. Comme $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$, il suffit de vérifier que (P_1, P_2) est libre. Puis $f(P_1) = 3 = \frac{3}{5}(3P_2 - 2P_1)$ et $f(P_2) = 2 = \frac{2}{5}(3P_2 - 2P_1)$.

Exercice 6 :

1. On applique la définition pour la linéarité. Puis, $\varphi(P) = \left(X^2P' - 2XP\right) + \left((1-X)P' + P + X^2P(1)\right)$, et $\deg(X^2P' - 2XP) \leq 2$ (les coefficients dominants s'annulent) et $\deg((1-X)P' + P + X^2P(1)) \leq 2$.
2. $\varphi(1) = X^2 - 2X + 1$, $\varphi(X) = 1$ et $\varphi(X^2) = 2X$.
3. On échelonne la matrice. On trouve $\text{rg}(\varphi) = 3$ donc c'est un automorphisme.

Exercice 7 :

1. On a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = 4$ et $\dim(\mathbb{R}_m[X]) = 3$ donc $n = 3$ et $m = 2$.
2. $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et $f(P) = 3aX^2 + 2bX + c = P'$.

Exercice 8 : $\varphi(E_{11}) = -2E_{12} + 3E_{21}$, $\varphi(E_{12}) = E_{12} - 3E_{21} - 3E_{22}$, $\varphi(E_{21}) = 2E_{11} + 3E_{21} - 2E_{22}$ et $\varphi(E_{22}) = 2E_{12} - 3E_{21}$.

Exercice 9 :

1. (a) On vérifie que la famille $(\sin, \cos, \text{ch}, \text{sh})$ est libre : on prend $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 \text{ch}(x) + \lambda_4 \text{sh}(x) = 0$. En prenant $x = 0$, $x = \pi$ et $x = -\pi$, on trouve $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$, puis $\lambda_4 = 0$ et enfin $\lambda_1 = 0$.
   Ainsi, $\dim(F) = 4$.
   De plus, $d(\sin) = \cos \in F$, $d(\cos) = -\sin \in F$, $d(\text{ch}) = \text{sh} \in F$ et $d(\text{sh}) = \text{ch} \in F$, donc F est stable par d.

   (b) D'après les valeurs trouvées ci-dessus : $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $d^2(\text{ch}) = \text{ch}$ et $d^2(\text{sh}) = \text{ch}$, donc pour tout n pair, $d^n(\text{ch}) = \text{ch}$ et $d^n(\text{sh}) = \text{sh}$ et si n est impair, $d^n(\text{ch}) = \text{sh}$ et $d^n(\text{sh}) = \text{ch}$.

De même si $n=4k$, $d^n(\sin)=\sin$, $d^n(\cos)=\cos$, $d^{n+1}(\sin)=\cos$, $d^{n+1}(\cos)=-\sin$, $d^{n+2}(\sin)=-\sin$, $d^{n+2}(\cos)=-\cos$, $d^{n+3}(\sin)=-\cos$, et $d^{n+3}(\cos)=\sin$.

Donc si $n=4k$: $M^n=I_4$, $M^{n+1}=M$, $M^{n+2}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et $M^{n+3}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

(c) On remarque que $M^4=I_4$, donc $M\in GL_4(\mathbb{R})$ et $M^{-1}=M^3$.

2. On cherche $\ker(M-I_4)=\mathrm{Vect}((0,0,1,1))$, donc $\ker(\varphi-\mathrm{id}_F)=\mathrm{Vect}(\mathrm{ch}+\mathrm{sh})=\mathrm{Vect}(\exp)$.
Puis $\mathrm{Im}(M+I_4)=\mathrm{Vect}((-1,1,0,0),(1,1,0,0),(0,0,-1,1))$, et $\mathrm{Im}(\varphi-\mathrm{id}_F)=\mathrm{Vect}(\cos-\sin,\sin+\cos,\mathrm{e}^{-t})$.
On a une solution particulière donnée par $f_0 : t\mapsto \mathrm{sh}(t)+\dfrac{1}{2}(\cos(t)-\sin(t))$ et la solution générale de l'équation homogène : $f_h : t\mapsto C\mathrm{e}^t$ pour $C\in\mathbb{R}$.

Exercice 10 :

1. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. $\varphi^{-1}(P)=P(X-1)$, donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.
2. On applique de nouveau Newton. On remarque aussi que $\psi\circ\psi=\mathrm{id}$, donc $\psi^{-1}=\psi$ et $B^{-1}=B$.

Exercice 11 :

1. On vérifie que $P^2=P$. $\ker(P)=\mathrm{Vect}((1,0,0))$ et $\mathrm{Im}(P)=\mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$.
2. On vérifie que $S^2=I_3$. $\ker(S-I_3)=\mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$ et $\ker(S+I_3)=\mathrm{Vect}((1,0,0))$. On remarque aussi que $S=2P-I_3$.

Exercice 12 :

1. Comme $f^{n-1}\neq 0$, il existe $x\in E$ tel que $f^{n-1}(x)\neq 0$.
2. Il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est libre. En prenant une relation de liaison $\lambda_0 x+\lambda_1 f(x)+\ldots+\lambda_{n-1}f^{n-1}(x)=0$, puis on applique f^{n-1} pour trouver $\lambda_0 f^{n-1}(x)=0$, donc $\lambda_0=0$. On reprend la relation et on applique f^{n-2} pour trouver $\lambda_1=0$ et ainsi de suite.
3. $\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\1&\ddots&&&\vdots\\0&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}$

Exercice 13 :

1. On peut par exemple échelonner la matrice $P=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ pour montrer que la famille est de rang 3.
2. P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u,v,w). Pour trouver les coordonnées de z dans la base (u,v,w), on calcule donc $P^{-1}z=(-5,-2,4)$.
3. On calcule $Px=(-8,3,11)$.

Exercice 14 :

1. On pose P la matrice associée à (f_1,f_2,f_3) et on l'échelonne.
2. On applique la formule de changement de bases : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}=D$
3. $A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}2^n+1&1&-2^n-1\\-2^n+1&1&2^n-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

Exercice 15 : On résout les quatre équations $\varphi(P)=P$, $\varphi(P)=2P$, $\varphi(P)=5P$ et $\varphi(P)=10P$. Pour cela, on écrit la matrice de φ dans la base canonique puis on pose les systèmes. On trouve $P_1=1$, $P_2=X-a$, $P_5=(X-a)^2$ et $P_{10}=(X-a)^3$ qui forment la base voulue.

Exercice 16 :

1. D'après le cours, $E=\mathrm{Im}(p)\oplus\ker(p)$. On prend une base de E adaptée à la somme directe $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_r,e_{r+1},\ldots,e_n)$, et la matrice de p dans cette base est bien de la forme voulue car pour $i\in[\![1,r]\!]$, $e_i\in\mathrm{Im}(p)$, donc $p(e_i)=e_i$ et pour $i\in[\![r+1,n]\!]$, $e_i\in\ker(p)$, donc $p(e_i)=0_E$.
2. $\mathscr{P}=\mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,1))$. Dans la base $\mathscr{B}=((-1,-1,1),(1,-1,0),(1,0,1))$ la matrice de s est $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
3. Dans la base canonique, on obtient $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(s)=P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

Exercice 17 :

1. On résout les systèmes idoines : $F = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$, $G = \text{Vect}(4e_1 + 3e_2 - 2e_3))$ et $H = \text{Vect}(2e_1 - 3e_2 + 2e_3)$ qui sont tous les trois de dimension 1.
2. On prend $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = 4e_1 + 3e_2 - 2e_3$ et $f_3 = 2e_1 - 3e_2 + 2e_3$ qui forme bien une base de E. De plus, $\text{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \text{diag}(1, 2, -4)$.
3. On note $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. Alors $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, -4)$ d'après la question précédente. Puis, $P^{-1}A^nP = \text{diag}(1, 2^n, (-4)^n)$.

Exercice 18 :

1. On peut remarquer que les deux premières colonnes de A sont colinéaires, et que $C_1 - C_4 = -3C_3$ et que C_1 et C_4 sont libres. Donc $\text{Im}(A) = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 4, 6))$, et les deux colonnes forment une base de $\text{Im}(A)$.
2. On a $\dim(\ker(A)) = 4 - \text{rg}(A) = 2$ et $(-1, 1, 0, 0) \in \ker(A)$ et $(1, 0, 3, -1) \in \ker(A)$. Les vecteurs $(-1, 1, 0, 0)$ et $(1, 0, 3, -1)$ sont linéairement indépendants, donc forment une base de $\ker(A)$.
3. On considère $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. On pose $e_1 = (1, 1, 0)$ et $e_2 = (1, 4, 6)$, qui sont dans l'image de u. On trouve ensuite $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = (0, 0, 0, 1)$, $f_3 = (-1, 1, 0, 0)$ et $f_4 = (1, 0, 3, -1)$ de sorte que $u(f_1) = e_1$, $u(f_2) = e_2$, $u(f_3) = u(f_4) = 0$. On complète (e_1, e_2) en une base de $\mathbb{R}^3$ avec $e_3 = (0, 0, 1)$ par exemple. On prend P la matrice de passage de la base canonique à la base (f_1, f_2, f_3, f_4) et Q la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3).
4. Notons $C = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MA = 0\}$. On a $M \in C \iff MQQ^{-1}AP = 0_{3,4}$. On commence donc par résoudre $ND = 0_{3,4}$ avec $D = Q^{-1}AP$. On note $N = (n_{ij})$ et on obtient
$$ND = 0_{3,4} \iff n_{11} = n_{2,1} = n_{31} = n_{21} = n_{22} = n_{32} = 0$$
Ainsi, $M \in C \iff MQ = aE_{3,1} + bE_{3,2} + cE_{3,3} \iff M \in \text{Vect}(E_{3,1}Q, E_{3,2}Q, E_{3,3}Q)$. On vérifie ensuite que les trois matrices sont libres car $E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}$ sont libres et Q est inversible, donc $\dim(C) = 3$.

Exercice 19 : On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à M. Alors $u^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C}^2)}$. Comme M est non nulle, u est non nul, donc il existe $e \in \mathbb{C}^2$ tel que $u(e) \neq 0_{\mathbb{C}^2}$. De plus, $u(e) \in \ker(u)$ car $u^2(e) = 0_{\mathbb{C}^2}$. Ainsi, $(u(e), e)$ forme une famille libre donc une base de $\mathbb{C}^2$. La matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et M est bien semblable à cette matrice.

Exercice 20 :

1. La famille est échelonnée en degrés, donc libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de E_n, c'est une base de E_n.
2. Pour $P \in E_n$, $\deg(P(X+1) - P(X)) \leq n$, donc $\Phi(P) \in E_n$. Puis, on vérifie la linéarité facilement.
3. $\Phi(F_0) = 0$, $\Phi(F_1) = 1$, puis si $k \geq 2$, $F_k(X+1) - F_k(X) = \dfrac{(X+1)X\ldots(X-k+2)}{k!} - \dfrac{X\ldots(X-k+2)(X-k+1)}{k!} = \dfrac{X\ldots(X-k+2)}{k!}(X + 1 - X + k - 1) = F_{k-1}$. Donc
$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
4. On remarque que d'après la question précédente, $\text{Im}(\Phi) = \text{Vect}(F_0, \ldots, F_{n-1}) = E_{n-1}$. On pose $H = \{P \in E_n \mid P(0) = 0\}$. C'est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc un hyperplan de E_n. De plus, $\ker(\Phi) = \text{Vect}(F_0)$ est un supplémentaire de H dans E_n. D'après le théorème du rang (version géométrique), $\Phi_S : H \to E_{n-1}$ est un isomorphisme.
5. (a) $F_2 = \dfrac{X^2 - X}{2}$, $F_1 = X$ et $F_0 = 1$, donc $Q = 2F_2 + F_1$.
   (b) On a $\Phi(F_3) = F_2$ et $\Phi(F_2) = F_1$, donc en posant $P = 2F_3 + F_2$, on trouve $\Phi(P) = X^2$ et $P(0) = 0$.
   (c) On obtient donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k+1) - P(k) = k^2$. En sommant de 0 à m,
$$\sum_{k=0}^{m} k^2 = \sum_{k=0}^{m} P(k+1) - P(k) = P(m+1) - P(0) = 2\frac{(m+1)m(m-1)}{6} + \frac{(m+1)m}{2} = \frac{m(m+1)(2m-2+3)}{6}.$$