Colles 30 - 10/06/2024 au 14/06/2024

Thèmes traités en classe

- Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires.
  Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 5, 6, 11, 12, 17, 14, 15, 18, 19.
- Chapitre 27 : Variables aléatoires.
  1. Définition, loi, image d'une variable aléatoire.
  2. Espérance : définition, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, formule de transfert, inégalité de Markov.
  3. Variance, écart-type : définition, formule de Huygens, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  4. Lois usuelles, espérances et variances.
  5. Couples de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales.
  6. Indépendance : définition, lemme des coalitions, espérance d'un produit de variables indépendantes.
  7. Covariance : définition, variance d'une somme.

  Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 8, 10, 12, 13, 15, 18, 20, 21, 23.

Questions de cours

- Soit $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$.
- Donner la définition de matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$, énoncer puis démontrer la formule de changement de base pour une application linéaire.
- C26 Exercice 11 : Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.
- C26 Exercice 12 : soit E de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
  - ▷ Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
  - ▷ Donner la matrice de f dans cette base.
- C26 Exercice 17 : soit E de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
  - ▷ Déterminer une base de $F = \ker(f - \mathrm{id}_E)$, $G = \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $H = \ker(f + 4\,\mathrm{id}_E)$.
  - ▷ Déterminer une base $\mathscr{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale et préciser les matrices de passage entre $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et la relation entre toutes ces matrices.
- Rappeler les lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale) et leurs espérances et variances. Démontrer la formule pour l'espérance d'une uniforme et d'une bninomiale.
- Énoncer la formule de transfert puis exercice 10 : soit $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et $Y \sim \mathscr{B}(n,p)$. Calculer $E(2^X)$ et $E(2^Y)$.
- Donner la définition de la variance et démontrer la formule de Huygens.
- Énoncer les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. Démontrer Markov.
- Donner la définition de covariance de deux variables aléatoires puis exercice 20 : soit X et Y qui suivent $\mathscr{B}(p)$ (avec $p \in]0,1[$) et $X \perp\!\!\!\perp Y$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Donner la loi de U, calculer $\mathrm{Cov}(U,V)$, justifier que U et V ne sont pas indépendantes.
- Énoncer le lemme des coalitions. Exemple du cours : soit $m_{1,1}, m_{1,2}, m_{2,1}, m_{2,2}$ quatre variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi : $P(m_{i,j} = 1) = P(m_{i,j} = -1) = \dfrac{1}{2}$. On note $M = (m_{i,j})$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

A savoir faire

1. Savoir déterminer l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
2. Savoir déterminer le noyau et l'image d'une matrice.
3. Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases.
4. Savoir faire un changement de bases.
5. Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à la main, ou bien reconnaître une loi usuelle.
6. Savoir calculer l'espérance
   - en revenant à la définition ;
   - en utilisant les lois usuelles ;
   - en utilisant la formule de transfert ;
   - en utilisant les propriétés de l'espérance.
7. Savoir calculer une variance, une covariance.
8. Savoir manipuler des variables aléatoires indépendantes.