Séries numériques - Exercices

Exercice 1. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}})$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2-\ln(n)}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}\cos(n)}{n^2}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)+\arctan(n)}{n+1}$
11. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
12. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^{10}\,\mathrm{e}^{-n^2}$

Exercice 2. Pour quelles valeurs de x les séries de termes généraux suivants convergent ?

1. $u_n = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$
2. $v_n = nx^n$.

Exercice 3.

1. Pour tout $n\geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Montrer que les suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont adjacentes.
2. Pour quelles valeurs de x la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge-t-elle ?

Exercice 4. Justifier la convergence puis calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n 2^{3n-2}}{3^{2n+1}}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

Exercice 5.

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ converge. On note S sa somme.
2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n non nul on a :
$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}.$$
3. En déduire la valeur de S.
4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 6. Pour quelles valeurs de a, b et $c\in\mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (a\sqrt{n}+b\sqrt{n-1}+c\sqrt{n-2})$ converge-t-elle ? Donner la somme dans ces cas.

Exercice 7.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{3^n}$ converge. On note S sa somme.
2. Soit $N\geq 1$ et $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n$. Pour $x\neq 1$, déterminer une expression sans $\sum$ de $f(x)$ puis de $f'(x)$.
3. En déduire la valeur de S.

Exercice 8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. Déterminer un équivalent de $(u_{n+1}-u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel noté γ.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et déterminer un équivalent de ses sommes partielles.

Exercice 9. On pose $u_n = \dfrac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ pour $n\geq 1$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
2. En déduire qu'il existe $C>0$ tel que : $n! \sim C\sqrt{n}\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}$.

3. On a démontré dans le chapitre sur l'intégration que : $\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+2)}}$.
   Déterminer la valeur de C.

Exercice 10. 1. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

   (a) Si $|\ell| < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ converge.
   (b) Si $|\ell| > 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
   (c) Donner un exemple de suite (u_n) telle que $\ell = 1$ et la série $\sum u_n$ diverge, puis un exemple avec $\ell = 1$ et la série $\sum u_n$ converge.

2. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{n!}{n^n} a^n$ pour $a > 0$.

Exercice 11 (Séries de Bertrand). On considère la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où α et β sont des réels fixés.

1. Pour quelles valeurs de α et β la série diverge-t-elle grossièrement ?
2. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série converge quelle que soit la valeur de β.
3. Montrer que si $\alpha < 1$, alors la série diverge quelle que soit la valeur de β.
4. On suppose maintenant que $\alpha = 1$.
   (a) Si $\beta \leq 0$, montrer que la série diverge.
   (b) On suppose que $\beta > 0$.
      i. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.
      ii. En déduire la nature de la série.
5. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}\right)$?

Exercice 12. Soit $\alpha > 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la série $\sum\limits_{k\geq n+1} \dfrac{1}{k^\alpha}$ converge.
   On note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$.
2. Soit $a > 0$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
3. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Pour quelles valeurs de α la série $\sum R_n$ converge-t-elle ?

Exercice 13. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de u_n
3. Quelle est la nature de la série $\sum u_n^2$?
4. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$. On pourra poser $v_n = \ln(u_n)$ en justifiant l'existence.

Exercice 14. Pour $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer la limite de $(1-\alpha)\zeta(\alpha)$ lorsque α tend vers 1^+.
2. En déduire un équivalent de $\zeta(\alpha)$ lorsque $\alpha \to 1^+$.

Exercice 15. On considère A l'ensemble des entiers naturels non nuls qui s'écrivent sans le chiffre 9. On note (u_n) la suite croissante des éléments de A.

1. Soit $m \geq 1$. Déterminer le nombre de chiffres de m en fonction de m.
2. Soit $n \geq 0$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k}$. Justifier que $S_n \leq \sum\limits_{k=1}^{\lfloor \log_{10}(u_n) \rfloor + 1} \dfrac{9^k}{10^{k-1}}$.
3. En déduire que la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ converge.