Chapitre 28 : Séries numériques

I. Généralités

I.1. Définitions

Définition I.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique.

- La **série de terme général** (u_n) est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On note cette série $\sum u_n$ ou encore $\sum_{n\geq 0} u_n$.
- Les S_n sont les **sommes partielles** de la série.
- On dit que la série **converge** lorsque la suite des sommes partielles converge et on note alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$. On appelle cette valeur la **somme** de la série.
- Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.
- Déterminer la **nature** d'une série c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

I.2. Premiers exemples

Définition I.2. On appelle **série géométrique** une série de terme général $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $a \in \mathbb{K}$.

Théorème I.1

Soit $a \in \mathbb{K}$. La série géométrique $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Définition I.3. On appelle **série exponentielle** une série de terme général $\left(\frac{z^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $z \in \mathbb{K}$.

Théorème I.2

Soit $z \in \mathbb{K}$. La série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$.

I.3. Premières propriétés

Proposition I.3. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors la série $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque I.1. Attention, la réciproque est fausse !! Il faut donc toujours faire attention lorsqu'on casse une somme en deux à vérifier que chaque terme converge.

Proposition I.4. *Deux séries qui ne diffèrent que d'un nombre fini de termes ont la même nature.*

Définition I.4. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n \geq p+1} u_n$ est une série convergente. On note $R_p = \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ le **reste d'ordre** p de la série.

Lemme I.1. *Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors*

1. $\forall n \geq 1,\ u_n = R_{n-1} - R_n$.
2. $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Théorème I.5

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors (u_n) converge vers 0.

Remarque I.2. Attention, la réciproque est TRES fausse !!

Proposition I.6. *La série **harmonique** $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.*

Définition I.5. Si (u_n) ne converge pas vers 0, alors on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Théorème I.7

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

II. Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, les termes généraux des séries sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

II.1. Critères de convergence

Théorème II.1

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles est croissante.
En particulier, la série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Remarque II.1. Si la série diverge, alors $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, et on s'autorise à écrire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème II.2

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_0,\ u_n \leq v_n$.

1. *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Remarque II.2. Si $N_0 = 0$ et $\sum v_n$ converge, alors on a de plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Théorème II.3

Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives telle que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

II.2. Comparaison série-intégrale

Définition II.1. On appelle **série de Riemann** une série de la forme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème II.4

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Méthode.
- Si $\alpha > 1$ et $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\alpha \leq 1$ et $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Théorème II.5

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et monotone.
- *Si f est croissante alors :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(t)dt.$$
- *Si f est décroissante alors :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^{n} f(t)dt.$$

Remarque II.3. Plutôt que de savoir par coeur le théorème précédent, il faut plutôt savoir retrouver ces encadrements dans des cas particuliers, comme on a fait pour les séries de Riemann.

III. Séries absolument convergentes

Définition III.1. On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge. On dit alors que la suite (u_n) est **sommable**.

Remarque III.1.
- On pourra noter $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ lorsque la suite (u_n) est sommable.
- Les résultats du paragraphe précédent s'appliquent toujours à la série $\sum |u_n|$.

Théorème III.1

Soit (u_n) une suite numérique. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge. De plus, $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Remarque III.2. Attention, la réciproque est fausse !!

Théorème III.2

Soit $\sum u_n$ *une série numérique et* $\sum v_n$ *une série à termes positifs. Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*