Séries numériques - Exercices

Exercice 1. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (1-e^{\frac{1}{n^2}})$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2-\ln(n)}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}\cos(n)}{n^2}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)+\arctan(n)}{n+1}$
11. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
12. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^{10}e^{-n^2}$

Exercice 2. Pour quelles valeurs de x les séries de termes généraux suivants convergent ?

1. $u_n = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$
2. $v_n = nx^n$.

Exercice 3.

1. Pour tout $n\geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Montrer que les suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont adjacentes.
2. Pour quelles valeurs de x la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge-t-elle ?

Exercice 4. Justifier la convergence puis calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n 2^{3n-2}}{3^{2n+1}}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

Exercice 5.

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ converge. On note S sa somme.
2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n non nul on a :
$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n+3}.$$
3. En déduire la valeur de S.
4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 6. Pour quelles valeurs de a, b et $c\in\mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (a\sqrt{n}+b\sqrt{n-1}+c\sqrt{n-2})$ converge-t-elle ? Donner la somme dans ces cas.

Exercice 7.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{3^n}$ converge. On note S sa somme.
2. Soit $N\geq 1$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n$. Pour $x\neq 1$, déterminer une expression sans $\sum$ de $f(x)$ puis de $f'(x)$.
3. En déduire la valeur de S.

Exercice 8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. Déterminer un équivalent de $(u_{n+1}-u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel noté γ.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et déterminer un équivalent de ses sommes partielles.

Exercice 9. On pose $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ pour $n\geq 1$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
2. En déduire qu'il existe $C>0$ tel que : $n! \sim C\sqrt{n}n^n e^{-n}$.

3. On a démontré dans le chapitre sur l'intégration que : $\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+2)}}$.
   Déterminer la valeur de C.

Exercice 10. 1. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

   (a) Si $|\ell| < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ converge.
   (b) Si $|\ell| > 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
   (c) Donner un exemple de suite (u_n) telle que $\ell = 1$ et la série $\sum u_n$ diverge, puis un exemple avec $\ell = 1$ et la série $\sum u_n$ converge.

2. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{n!}{n^n} a^n$ pour $a > 0$.

Exercice 11 (Séries de Bertrand). On considère la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où α et β sont des réels fixés.

1. Pour quelles valeurs de α et β la série diverge-t-elle grossièrement ?
2. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série converge quelle que soit la valeur de β.
3. Montrer que si $\alpha < 1$, alors la série diverge quelle que soit la valeur de β.
4. On suppose maintenant que $\alpha = 1$.
   (a) Si $\beta \leq 0$, montrer que la série diverge.
   (b) On suppose que $\beta > 0$.
      i. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.
      ii. En déduire la nature de la série.
5. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}\right)$?

Exercice 12. Soit $\alpha > 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la série $\sum\limits_{k\geq n+1} \dfrac{1}{k^\alpha}$ converge.
   On note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$.
2. Soit $a > 0$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
3. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Pour quelles valeurs de α la série $\sum R_n$ converge-t-elle ?

Exercice 13. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de u_n
3. Quelle est la nature de la série $\sum u_n^2$?
4. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$. On pourra poser $v_n = \ln(u_n)$ en justifiant l'existence.

Exercice 14. Pour $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer la limite de $(1-\alpha)\zeta(\alpha)$ lorsque α tend vers 1^+.
2. En déduire un équivalent de $\zeta(\alpha)$ lorsque $\alpha \to 1^+$.

Exercice 15. On considère A l'ensemble des entiers naturels non nuls qui s'écrivent sans le chiffre 9. On note (u_n) la suite croissante des éléments de A.

1. Soit $m \geq 1$. Déterminer le nombre de chiffres de m en fonction de m.
2. Soit $n \geq 0$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k}$. Justifier que $S_n \leq \sum\limits_{k=1}^{\lfloor \log_{10}(u_n) \rfloor + 1} \dfrac{9^k}{10^{k-1}}$.
3. En déduire que la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ converge.

Indications - Solutions

Exercice 1 :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \dfrac{1}{n}$, les séries sont à termes positifs et la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (Riemann), donc la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.
2. $|1-\mathrm{e}^{1/n^2}| \sim \left|-\dfrac{1}{n^2}\right|$ qui est le terme général d'une série convergente (Riemann) à termes positifs. Par comparaison, la série $\sum(1-\mathrm{e}^{1/n^2})$ converge absolument.
3. $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right| = \left|\dfrac{1}{n}(1-\dfrac{1}{2n^2}-1-\dfrac{1}{2n^2}+o(1/n^2))\right| = \left|-\dfrac{1}{n^3}+o(1/n^3)\right| \sim \dfrac{1}{n^3}$ qui est le terme général d'une série convergente (Riemann). De plus, les deux séries sont à termes positifs, donc par comparaison, la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ converge absolument.
4. Comme $\left|\dfrac{1}{n^2-\ln(n)}\right| \sim \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente et que les termes généraux sont positifs, par comparaison, la série $\sum \dfrac{1}{n^2-\ln(n)}$ converge absolument.
5. $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$: les deux suites sont positives, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série ne converge pas.
6. $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$ les deux suites sont positives, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série converge.
7. $\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \to 1 \neq 0$, donc la série diverge grossièrement.
8. Si $|a|>1$, $\left|\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}\right| \sim \left|\dfrac{a^n}{a^{2n}}\right| = \dfrac{1}{|a|^n}$ qui est le terme général d'une série convergente, donc la série converge absolument.
   Si $|a|=1$, $\left|\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}\right| = \dfrac{1}{2}$ donc la série diverge grossièrement.
   Si $|a|<1$, $\left|\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}\right| \sim |a|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente, donc la série converge absolument.
9. $\left|\dfrac{\sqrt{n+1}\cos(n)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$ qui est le terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série converge absolument.
10. $\dfrac{\ln(n)+\arctan(n)}{n+1} \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$. Les séries sont à termes positifs donc ont la même nature. De plus, $\dfrac{\ln(n)}{n} \geq \dfrac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série divergente. Donc la série diverge.
11. $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{1+1/n}-1) \sim \dfrac{1}{2n^{3/2}}$ qui est le terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série converge.
12. $n^{12}\mathrm{e}^{-n^2} \to 0$, donc $n^{10}\mathrm{e}^{-n^2} = o(1/n^2)$. La série étant à termes positifs, la série $\sum n^{10}\mathrm{e}^{-n^2}$ converge par comparaison.

Exercice 2 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série converge absolument.
2. Si $|x| \geq 1$, la suite nx^n ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
   Si $|x|<1$, on peut par exemple comparer à $\dfrac{1}{n^2}$: $|n^3x^n| \to 0$ par croissances comparées, donc $|nx^n| = o(1/n^2)$ et par comparaison à une série de Riemann convergente, la série converge absolument.

Exercice 3 :

1. Déjà, $S_{2p+1}-S_{2p} = -\dfrac{1}{\sqrt{2p+1}} \to 0$. Puis, $S_{2p+3}-S_{2p+1} = -\dfrac{1}{\sqrt{2p+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2p+1}} > 0$ et $S_{2p+2}-S_{2p} = \dfrac{1}{\sqrt{2p+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2p+1}} < 0$.
2. Si $|x|>1$, alors $\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 0 par croissances comparées. Donc la série diverge grossièrement.
   Si $x=1$, la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann).
   Si $|x|<1$, on prend y tel que $|x|<y<1$ et alors $\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}} = o(y^n)$ car $\dfrac{|x|}{y} < 1$ et la série $\sum y^n$ est géométrique convergente.
   Si $x=-1$, la série ne converge pas absolument car $\left|\dfrac{x^n}{sqrtn}\right| \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Par contre, d'après la question précédente, elle converge.

Exercice 4 :

1. Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \dfrac{1}{n!}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n!}$ qui est le terme général d'une série exponentielle donc convergente.
   Soit $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n!}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(N+1)!} \to 1$ par téléscopage.

2. On a $\dfrac{1}{n^2-1} \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc par comparaison des séries à termes positifs, la série converge. Puis, $\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$, donc pour $N \geq 2$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \to \frac{3}{2}$.
3. $\dfrac{(-1)^n 2^{3n-2}}{3^{2n+1}} = \dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$, et comme $\left|-\dfrac{8}{9}\right| < 1$, la série est géométrique convergente. De plus, la somme vaut $\dfrac{1}{12}\dfrac{1}{1+\frac{8}{9}} = \dfrac{3}{68}$.
4. Comme $\dfrac{x^{2n+1}}{n!} = x\dfrac{(x^2)^n}{n!}$ c'est une série exponentielle. Or, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge pour tout $u \in \mathbb{R}$, donc la série $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{n!}$ converge aussi.
De plus, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x\mathrm{e}^{x^2}$.

Exercice 5 :

1. C'est une série à termes positifs et $\dfrac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \sim \dfrac{3}{n^4}$ qui est une série de Riemann convergente. Par comparaison, la série converge.
2. On trouve $\dfrac{3}{n(n+3)} = \dfrac{n+3-n}{n(n+3)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+3}$.
3. Pour $N \geq 1$,
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}$$
par téléscopage. Donc $S = \dfrac{1}{6}$.
4. La série est à termes positifs et $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{1}{n^3}$ qui est une série de Riemann convergente.
Puis on décompose en éléments simples : $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1/2}{n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1/2}{n+2}$. Pour $N \geq 1$,
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)}$$
Donc la somme vaut $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 6 : On fait un développement limité de $u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n-1} + c\sqrt{n-2}$:
$$u_n = \sqrt{n}(a + b(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2}) + c(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}) + o(1/n^2)) = \sqrt{n}(a + b + c + (-b/2 - c)\frac{1}{n} + (b/8 + c/2)\frac{1}{n^2} + o(1/n^2)).$$
Donc si $a + b + c \neq 0$, $u_n \sim (a+b+c)\sqrt{n}$ qui ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.
Si $a + b + c = 0$, et $-b/2 - c \neq 0$, alors $u_n \sim (-b/2 - c)\dfrac{1}{n}$ et par comparaison, la série diverge.
Enfin, si $a + b + c = 0$ et $-b/2 - c = 0$ alors $u_n = O(1/n^2)$ donc la série converge.
Dans ce cas, on trouve $c = -b/2$, et $a = -b/2$, donc $u_n = a(\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2})$. Pour $N \geq 2$,
$$\sum_{n=1}^{N} u_n = a\left(\sum_{n=2}^{N} \sqrt{n} - 2\sum_{n=1}^{N-1} \sqrt{n} + \sum_{n=0}^{N-2} \sqrt{n}\right) = a(-2 + \sqrt{0} + 1 + \sqrt{N} + \sqrt{N-1} - 2\sqrt{N-1})$$
Or $\sqrt{N} - \sqrt{N-1} \sim \sqrt{N}\dfrac{1}{2N} \to 0$, donc la somme vaut $-a$.

Exercice 7 :

1. On peut par exemple remarquer que $n^2 \dfrac{n}{3^n} \to 0$ par croissances comparées, donc $\dfrac{n}{3^n} = o(1/n^2)$. Par comparaison, la série converge.
2. Si $x \neq 1$, alors $f(x) = \dfrac{1 - x^{N+1}}{1-x}$. Donc $f'(x) = \dfrac{-(N+1)x^N(1-x) + (1 - x^{N+1})}{(1-x)^2} = \dfrac{Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1}{(1-x)^2}$.
3. On a aussi $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} nx^n$. En particulier, pour $x = \dfrac{1}{3}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{3^n} = \frac{N\frac{1}{3^{N+1}} - (N+1)\frac{1}{3^N} + 1}{\frac{4}{9}} \to \frac{9}{4} = S$.

Exercice 8 :

1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln(1 + 1/n) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + o(1/n^2) \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.
2. Par comparaison de séries à termes de signes constants, $\sum u_{n+1} - u_n$ converge absolument. Donc la suite (u_n) converge.
3. On obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma + o(1)$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 9 :

1. On calcule : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-n-1}\sqrt{n+1}\,n!}{(n+1)!\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1/2}\,\mathrm{e}^{-1}}{n^{n+1/2}}\right) = (n+1/2)\ln(1+1/n)-1 = (n+1/2)(1/n-1/2n^2+\frac{1}{3n^2}+o(1/n^3))-1 = \frac{1}{12n^2}+o(1/n^2)$, donc la série converge par comparaison à une série de Riemann.
2. Ainsi, la suite $v_n = \ln(u_n)$ converge : il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $v_n \to A$. Par continuité de l'exponentielle, $u_n \to \mathrm{e}^A$, en posant $C = \mathrm{e}^{-A} > 0$, on trouve l'équivalent voulu.
3. On remplace :
$$\sqrt{\frac{\pi}{4(n+1)}} \sim \frac{2^{2n}C^2 n^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n}}{C\sqrt{2n+1}(2n+1)^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n-1}},$$
donc $C \sim \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-1}\frac{(2n+1)^{2n+1}\sqrt{2n+1}}{2^{2n+1}\sqrt{n+1}\,n^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\mathrm{e}}\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+1}}(1+1/2n)^{2n+1}$. Or $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+1}} \to \sqrt{2}$ et $(1+1/2n)^{2n+1} = \mathrm{e}^{(2n+1)\ln(1+1/2n)} = \mathrm{e}^{(2n+1)/(2n)+o(1)} \to \mathrm{e}$. D'où $C = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 10 :

1. (a) Supposons $|\ell| < 1$. Alors il existe $|\ell| < k < 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, d'où $u_{n+1} \leq k u_n$. Par récurrence, il existe $M \geq 0$ tel que $u_n \leq M k^{n-N}$ pour tout $n \geq N$. Par comparaison à une série géométrique, la série $\sum u_n$ converge.
   (b) Si $|\ell| > 1$, alors à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, donc la suite est croissante, elle ne peut pas converger vers 0. La série diverge grossièrement.
   (c) On prend $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$. Si $\alpha \leq 1$, la série diverge, sinon elle converge.
2. On pose $u_n = \frac{n!}{n^n}a^n$ qui est une suite à terme strictement positifs. On a alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a(1+1/n)^{-n} \to \frac{a}{\mathrm{e}}$. Donc la série converge si $a < \mathrm{e}$ et diverge si $a > \mathrm{e}$. Pour $a = \mathrm{e}$, on ne sait pas. On peut utiliser l'équivalent de Stirling (exercice 9) : $\frac{n!}{n^n}\mathrm{e}^n \sim \sqrt{2\pi n}$ donc la série ne converge pas.

Exercice 11 :

1. Si $\alpha < 0$, alors la série diverge grossièrement par croissances comparées. Si $\alpha = 0$ et $\beta < 0$ aussi. Si $alpha < 0$, on a $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \to 0$ quel que soit β par croissances comparées.
2. Prenons $\alpha > 1$. On prend γ tel que $1 < \gamma < \alpha$. Alors $n^\gamma \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}\ln(n)^\beta} \to 0$ quel que soit β par croissances comparées. Donc $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o(1/n^\gamma)$. Par comparaison avec une série de Riemann, la série converge donc quelle que soit la valeur de β.
3. Prenons $\alpha < 1$. On procède de même en prenant γ tel que $\alpha < \gamma < 1$. Cette fois on a $\frac{1}{n^\gamma} = o(\frac{1}{n^\alpha \ln(\beta)})$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ ne converge pas, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ ne converge pas non plus.
4. (a) Si $\beta \leq 0$, alors $\frac{1}{n\ln(n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série qui diverge.
   (b) i. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)^\beta$ sont strictement croissantes et positives sur $]2,+\infty[$, donc f est strictement décroissante.
   ii. On fait une comparaison série-intégrale, pour $n \geq 3$:
$$\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n(\ln(n))^\beta} \leq \int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t \text{ donc } \int_3^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(\ln(n))^\beta} \leq \frac{1}{2\ln(2)^\beta}\int_2^N f(t)\mathrm{d}t$$
   Or, si $\beta \neq 1$, $\int_2^N f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\beta}[\ln(t)^{-\beta+1}]_2^N$ qui converge si $1-\beta < 0 \iff \beta > 1$ et $\int_3^{N+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\beta}[\ln(t)^{-\beta+1}]_3^{N+1}$ qui diverge si $\beta < 1$. Puis, si $\beta = 1$, $\int_3^{N+1} f(t)\mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_3^{N+1}$ qui diverge.
   Donc la série converge ssi $\beta > 1$.
   (c) $\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)} = \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\sqrt{\ln(n+1)}+\sqrt{\ln(n)}} = \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{\ln(n)+\ln(1+1/n)}+\sqrt{\ln(n)}} \sim \frac{1}{2n\ln(n)^{\frac{1}{2}}}$. La série diverge !
   Bon, on peut aussi remarquer que c'est une série téléscopique...

Exercice 12 :

1. C'est le reste d'une série de Riemann convergente !
2. $\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}[t^{1-\alpha}]_a^x \to \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ car $1-\alpha < 0$.
3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $k \geq n+2$: $\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$. Donc $\int_{n+2}^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n+1}^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

D'après la question précédente, pour tout $n \geq 0$, $\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{(n+2)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq R_n \leq \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$. Or les deux côtés sont équivalents à $\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ qui est donc l'équivalent cherché pour R_n.

4. La série $\sum R_n$ converge ssi $1-\alpha < -1$, c'est-à-dire, ssi $\alpha > 2$.

Exercice 13 :

1. On montre par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n} \leq u_n$, donc (u_n) est décroissante. D'après le TCM, elle converge vers $\ell \geq 0$. Par continuité de $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$, $\ell = \ell \mathrm{e}^{-\ell}$, donc soit $\ell = 0$, soit $1 = \mathrm{e}^{-\ell}$ ce qui donne aussi $\ell = 0$. Donc $u_n \to 0$.
2. $u_{n+1} - u_n = u_n(\mathrm{e}^{-u_n} - 1) \sim -u_n^2$ car $u_n \to 0$.
3. La série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge et à termes négatifs. Donc par comparaison, $\sum -u_n^2$ converge aussi, donc $\sum u_n^2$ converge.
4. Pour tout n, $u_n > 0$, donc $v_n = \ln(u_n)$ est bien définie. Puis, $v_{n+1} = v_n - u_n$, d'où $v_{n+1} - v_n = -u_n$. Comme la série $\sum v_{n+1} - v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi.

Exercice 14 :

1. Soit $\alpha > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc pour tout $n \geq 2$,

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

En sommant, on trouve pour $N \geq 2$ et en multipliant par $\alpha - 1$:

$$(\alpha-1)\int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq (\alpha-1)\sum_{n=2}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq (\alpha-1)\int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

Or $(\alpha-1)\int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = -[t^{1-\alpha}]_2^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2^{\alpha-1}}$ et $(\alpha-1)\int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$. Donc pour tout $\alpha > 1$,

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} \leq (\alpha-1)\zeta(\alpha) \leq 1$$

D'où $(\alpha-1)\zeta(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to1^+]{} 1$ par encadrement.

2. Ainsi, $\zeta(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha-1}$.

Exercice 15 :

1. Soit N le nombre de chiffre de m : $10^{N-1} \leq m < 10^N$, donc $(N-1) \leq \log_{10}(m) < N$. Ainsi, $N-1 = \lfloor \log_{10}(m) \rfloor$ et $N = \lfloor \log_{10}(m) \rfloor + 1$.
2. On note $N = \lfloor \log_{10}(u_n) \rfloor + 1$ qui est le nombre de chiffres dans u_n. Alors pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, il y a moins de 9^k nombres à k chiffres sans 9 et chacun de ces nombres sont supérieur ou égal à 10^{k-1}. En regroupant les u_k par nombre de chiffres, on obtient donc : $S_n \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{9^k}{10^{k-1}}$.
3. La série est à termes positifs, et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\lfloor \log_{10}(u_n) \rfloor + 1} \frac{9^k}{10^{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k}{10^{k-1}} = \frac{10}{9}$ (somme géométrique), la série converge.