Chapitre 29 : Espaces préhilbertiens réels

I. Produit scalaire

I.1. Définition

Définition I.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un **produit scalaire** sur E est une application :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle \end{array} \right.$$

vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. **bilinéarité** : $\forall x,y,z \in E$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$ et $\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda\langle z,x\rangle + \mu\langle z,y\rangle$
2. **symétrie** : $\forall x,y \in E$, $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
3. **positivité** : $\forall x \in E$, $\langle x,x\rangle \geq 0$
4. **séparation / définie positivité** : $\forall x \in E$, $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

On dit alors que le couple $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un **espace préhilbertien réel**. Lorsque E est de dimension finie, on l'appelle plutôt un **espace euclidien**.

Remarque I.1. On peut aussi voir la notation $(x|y)$ ou bien $x \cdot y$ pour le produit scalaire.

I.2. Exemples

Proposition I.1. *L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui à $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $y = (y_1,\dots,y_n)$ associe :*

$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$$

*est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé le **produit scalaire canonique de** $\mathbb{R}^n$.*

Remarque I.2. En identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique s'écrit :

$$\forall X,Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X,Y\rangle = X^\top Y.$$

Proposition I.2. *L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall f,g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \quad \langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire.

Proposition I.3. *L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$$

est un produit scalaire.

I.3. Norme associée à un produit scalaire

Dans toute la suite, $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ **un espace préhilbertien réel.**

Définition I.2. L'application

$$\|\cdot\| : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x,x\rangle} \end{array} \right.$$

est appelée **norme associée au produit scalaire**.
Un vecteur $x \in E$ est dit **unitaire** si $\|x\| = 1$.
La **distance** entre deux vecteurs $x, y \in E$ est le réel $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$.

Proposition I.4.
1. *$\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (c'est la **séparation** de la norme).*
2. *$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (c'est l'**homogénéité** de la norme).*
3. ***Identités remarquables** : $\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ et $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$.*
4. ***Formule de polarisation** : $\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$.*
5. ***Identité du parallélogramme** : $\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.*

Proposition I.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

$$\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Proposition I.6 (Inégalité triangulaire).

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont positivement liés, i.e. ssi $y = 0_E$ ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tels que $x = \lambda y$.

Corollaire I.7.

$$\forall x, y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

II. Orthogonalité

II.1. Vecteurs orthogonaux

Définition II.1.
- Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$.
- On dit qu'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E est **orthogonale** si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j\rangle = 0$.
- On dit qu'une famille de vecteurs de E est **orthonormale** ou (**orthonormée**) si elle est orthogonale et tous les vecteurs sont unitaires.

Théorème II.1 (Pythagore)

- *Soit $x, y \in E$ deux vecteurs. Alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ssi x et y sont orthogonaux.*
- *Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille orthogonale, alors $\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.*

Proposition II.2. *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Alors la famille $\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$ est orthonormale.*

Remarque II.1. Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs. L'hypothèse de non nullité est donc importante !

Proposition II.3. *Une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.*

II.2. Orthogonal d'une partie

Définition II.2. Soit $A \subset E$ une partie non vide. L'**orthogonal** de A est l'ensemble :

$$A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}.$$

C'est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

Proposition II.4. *Soient A et B deux parties non vides.*

1. *$A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Si $A = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors*
$$x \in A^{\perp} \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \langle x, e_i \rangle = 0.$$
3. *$E^{\perp} = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^{\perp} = E$.*

Proposition II.5. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F et $F^{\perp}$ sont en somme directe.*

III. Espaces euclidiens

On suppose dans ce paragraphe que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

III.1. Bases orthonormées

Définition III.1. On dit qu'une base de E est orthogonale (resp. orthonormale) si c'est une famille orthogonale (resp. orthonormale).

Proposition III.1. *Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit $x, y \in E$.*

1. $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
2. $\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = \langle x, e_1 \rangle \langle y, e_1 \rangle + \cdots + \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle$
3. $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2} = \sqrt{\langle x, e_1 \rangle^2 + \cdots + \langle x, e_n \rangle^2}$
4. *Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$, alors $\langle x, y \rangle = X^{\top} Y$ et $\|x\| = \sqrt{X^{\top} X}$.*

III.2. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition III.2 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). *Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de E. Il existe une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ telle que :*

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$$

Méthode. L'application du procédé de Gram-Schmidt est algorithmique :

- on pose $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$
- si $e_1, \dots, e_k$ sont construits, on pose $f_{k+1} = u_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle u_{k+1}, e_i \rangle e_i$ et $e_{k+1} = \dfrac{f_{k+1}}{\|f_{k+1}\|}$.

Corollaire III.3. *Soit E un espace euclidien. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.*
En particulier, E admet une base orthonormale.

IV. Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

E n'est plus forcément de dimension finie.

IV.1. Supplémentaire orthogonal

Proposition IV.1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors $E = F \oplus F^\perp$.*
Le sous-espace $F^\perp$ est appelé le ***supplémentaire orthogonal de*** *F.*

Proposition IV.2. *Supposons que E est euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E.*

1. $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$
2. $(F^\perp)^\perp = F$.

Remarque IV.1. Si F est un hyperplan de E, alors $F^\perp$ est une droite. Donc il existe $u \in E$ tel que $F^\perp = \mathrm{Vect}(u)$. On dit que u est un **vecteur normal** à F, et on a alors $F = \{x \in E \mid \langle x, u\rangle = 0\}$.

Proposition IV.3. *Supposons que E est euclidien et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E de bases $(f_1, \dots, f_n)$ et $(g_1, \dots, g_p)$. Alors $G = F^\perp$ si et seulement si :*

- $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
- $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \langle f_i, g_j\rangle = 0$.

IV.2. Projection orthogonale

Définition IV.1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle **projection orthogonale sur** F, notée p_F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Proposition IV.4. *Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F. Pour tout $x \in E$*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Proposition IV.5. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.*

$$\forall x, y \in E, \quad y = p_F(x) \iff \big(y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp\big)$$

Corollaire IV.6. *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E,*

1. $\forall x \in E$, $x - p_F(x) \in F^\perp$
2. $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$

IV.3. Distance à un sous-espace

Théorème IV.7

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et soit $x \in E$.
L'ensemble $\{\|x-f\|, f \in F\}$ est non vide et minoré.
On pose $d(x,F) = \inf_{f \in F}(\|x-f\|)$: c'est la ***distance de*** *x* ***à*** *F.*
De plus, $\|x - p_F(x)\| = d(x,F)$ et

$$\forall f \in F, \|x-f\| = d(x,F) \Rightarrow f = p_F(x).$$

Corollaire IV.8. *Si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E, $d(x,F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$.*