Espaces préhilbertiens réels - Exercices

Exercice 1. Montrer que les applications suivantes définissent des produits scalaires :

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & P(1)Q(1)+P(2)Q(2)+P(3)Q(3) \end{cases}$
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & P(0)Q(0)+P'(0)Q'(0)+P''(0)Q''(0) \end{cases}$
3. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\mathrm{d}t \end{cases}$
4. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})\times\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{cases}$
5. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})\times\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 (fg+f'g') \end{cases}$
6. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & X^\top Y \end{cases}$
7. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_{n}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (M,N) & \mapsto & \mathrm{tr}(M^\top N) \end{cases}$
8. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) & \mapsto & 2xx'+xy'+x'y+2yy' \end{cases}$

Exercice 2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_0,\dots,a_n$ des réels tous distincts. Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, on note L_i le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $L_i=\prod\limits_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\dfrac{X-a_j}{a_i-a_j}$. Pour tout $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q)=\sum\limits_{i=0}^{n}P(a_i)Q(a_i)$.

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout $i\in[\![0,n]\!]$ et tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $(L_i|P)=P(a_i)$.
3. Montrer que la famille $(L_0,\dots,L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. En déduire que pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $P=\sum\limits_{i=0}^{n}P(a_i)L_i$.
5. Soit $H=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\mid \sum\limits_{i=0}^{n}P(a_i)=0\right\}$. Soit $Q\in\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\mathrm{d}(Q,H)$.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Soit

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t+f(0)g(0). \end{cases}$$

Montrer que c'est un produit scalaire sur E.

Exercice 4. Montrer que pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2\leq n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$.
Pour quels $(x_1,\dots,x_n)$ a-t-on égalité ?

Exercice 5. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n}k\sqrt{k}\leq\dfrac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

Exercice 6. Nature de la série de terme général : $u_n=\dfrac{1}{n^2(\sqrt{2})^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}}$.

Exercice 7. Soit $a<b$ deux réels et $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\geq(b-a)^2$.
Étudier le cas d'égalité.

Exercice 8. Soit $E = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est périodique de période } 2\pi\}$.

1. Vérifier que E est un sev de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{cases}$ est un produit scalaire sur E.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathscr{F} = (x \mapsto \cos(kx))_{0\leq k\leq n}$ est orthogonale.
4. E est-il de dimension finie ?

Exercice 9. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t \end{cases}$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la projection orthogonale de X^4 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 10. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $A^\top AX = 0_n \iff AX = 0_n$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top A)$.
3. Montrer alors que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.

Exercice 11. Soit E un espace euclidien. Si $v \in E$, on note $\varphi_v \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ la forme linéaire définie par $\varphi_v(x) = \langle v, x\rangle$.

1. Montrer que l'application $\Phi : v \in E \mapsto \varphi_v \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ est un isomorphisme.
2. Soit $H \subset E$. Montrer que H est un hyperplan de E ssi c'est l'orthogonal d'un vecteur non nul.
3. On prend $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
   Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul. On pose $H = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$.
   Justifier que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et donner un vecteur normal à H. Déterminer ensuite la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Exercice 12. On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = x-y+z-t = 0\}$.

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. On prend $u = (1,2,3,4)$. Calculer $d(u,F)$.

Exercice 13. $\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire usuel. On pose $u = (1,1,1,0)$ et $v = (1,1,0,1)$ et $F = \mathrm{Vect}(u,v)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 14. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\mathrm{e}^x - ax - b)^2\mathrm{d}x$.

Exercice 15. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $A, B \in E$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que pour tout $A \in E$, $\mathrm{tr}(A) \leq \sqrt{n\,\mathrm{tr}(A^\top A)}$. Quand a-t-on égalité ?
3. Soit $H = \{M \in E \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$. Justifier que H est un sev de E et déterminer $H^\perp$.
4. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
5. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit $A \in E$. Montrer que $\displaystyle\inf_{S\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1\leq i,j\leq n} ([A]_{ij} - [S]_{ij})^2 = \frac{1}{4}\sum_{1\leq i,j\leq n} ([A]_{ij} - [A]_{ji})^2$.