Chapitre 30 : Déterminants

Dans tout le chapitre, on considère un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n.

I. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

I.1. Définition

Théorème I.1 (Admis)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Il existe une unique application $\det_{\mathscr{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ qui est :

- *linéaire par rapport à chacune de ses variables, i.e. :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, x \in E \mapsto \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ est linéaire}$$

- *alternée, i.e. :*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, (\exists (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \mid i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \Rightarrow \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

- $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Proposition I.2. *Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une application qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables et alternée. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.*

1. *Si $i \neq j$, alors $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$. On dit que f est* ***antisymétrique****.*
2. *Si un vecteur x_i est nul, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.*
3. *Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

Proposition I.3. *Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses variable et alternée. Alors $f = f(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$.*

Corollaire I.4. *Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors $\det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$.*

Proposition I.5. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E ssi $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.*

I.2. Interprétation géométrique en dimension 2 et 3

Supposons d'abord que $n = 2$ et prenons $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E.

Proposition I.6. *Soit $x, y \in E$ dont les coordonnées respectives dans la base $\mathscr{B}$ sont (a, b) et (c, d). Alors $\det_{\mathscr{B}}(x, y) = ad - bc$.*

Remarque I.1. $|\det_{\mathscr{B}}(x, y)|$ s'interprète comme l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs x et y, en prenant comme unité d'aire le parallélogramme construit sur e_1, e_2.

Prenons maintenant $n = 3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

Proposition I.7. *Soit x, y, z trois vecteurs de E de coordonnées respectives dans la base $\mathscr{B}$, (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3). Alors*

$$\det_{\mathscr{B}}(x, y, z) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - z_1 y_2 x_3 - z_2 y_3 x_1 - z_3 y_1 x_2.$$

Remarque I.2. $|\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)|$ mesure le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $x_1, \dots, x_n$, sachant que le volume unité est donné par celui engendré par $\mathscr{B}$.

II. Déterminant d'un endomorphisme

Proposition II.1. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathscr{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ deux bases de E. Alors* $\det_{\mathscr{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_{\mathscr{B}'}(f(v_1), \dots, f(v_n))$.

Définition II.1. Soit E de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Le **déterminant** de f est le scalaire $\det(f) = \det\limits_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$ pour n'importe quelle $\mathscr{B}$ une base de E.

Corollaire II.2. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$,* $\det_{\mathscr{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque II.1. Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $\det_{\mathscr{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$: le déterminant de f mesure de quel facteur f amplifie les volumes dans E.

Proposition II.3. *Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.
2. $\det(\lambda f) = \lambda^{\dim(E)} \det(f)$.
3. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
4. *f est un automorphisme ssi* $\det(f) \neq 0$. *Dans ce cas,* $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

III. Déterminant d'une matrice carrée

Définition III.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$, le **déterminant** de M est le scalaire $\det(M) = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \dots, C_n)$.

Proposition III.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application* $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est*

1. *linéaire par rapport à chacune des colonnes :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall C_1, \cdots, C_n \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ X & \mapsto & \det(C_1|\cdots|C_{i-1}|X|C_{i+1}|\cdots|C_n) \end{array} \right. \quad \textit{est linéaire.}$$

2. $\det$ *est **alternée** : si deux colonnes de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont égales, alors* $\det(M) = 0$.
3. $\det(I_n) = 1$.

De plus, si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ est une base de E alors $\det(u) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u))$.

Notation III.1. Si $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note aussi : $\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$.

Proposition III.2. *Pour $n = 2$: soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors* $\det(M) = ad - bc$.

Proposition III.3 (Admis). *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a* $\det(M^\top) = \det(M)$. *Autrement dit, toutes les propriétés données sur les colonnes sont aussi vraies pour les lignes.*

Proposition III.4. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *Soit N la matrice obtenue à partir de M en échangeant deux colonnes. Alors $\det(N) = -\det(M)$. On dit que $\det$ est* ***antisymétrique****.*
2. *Si une colonne de M est nulle, alors $\det(M) = 0$.*
3. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.*
4. *$\det(\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)) = d_1 \times \cdots \times d_n$.*

IV. Calculs de déterminants

IV.1. Pivot de Gauss

Proposition IV.1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.*

1. *Si N est la matrice obtenue en faisant $C_i \leftrightarrow C_j$, alors $\det(N) = -\det(M)$.*
2. *Si N est la matrice obtenue en faisant $C_j \leftarrow \lambda C_j$, alors $\det(N) = \lambda \det(M)$.*
3. *Si N est la matrice obtenue en faisant $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$, alors $\det(N) = \det(M)$.*

Les énoncés analogues sur les lignes sont aussi vrais.

Remarque IV.1. On ne change donc pas la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Corollaire IV.2. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.*

IV.2. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition IV.1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Le **mineur** de position (i, j) de M, noté $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice $(m_{kl})_{\substack{k \neq i \\ j \neq l}} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en enlevant la i-ième ligne et la j-ième colonne de M.

Proposition IV.3. *Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.*

1. *On peut développer le déterminant de M par rapport à la i-ième ligne :*
$$\det(M) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} m_{ik} \Delta_{i,k}.$$
2. *On peut développer le déterminant de M par rapport à la j-ième colonne :*
$$\det(M) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} m_{k,j} \Delta_{k,j}.$$

IV.3. Déterminant et opérations

Proposition IV.4.

1. *Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque colonne et alternée. Alors $\varphi = \varphi(I_n) \det$.*
2. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.*

Remarque IV.2. Attention, en général, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Corollaire IV.5.

1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
$$M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(M) \neq 0$$
De plus, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$.
2. *Deux matrices semblables ont le même déterminant.*