Espaces préhilbertiens réels - Exercices

Exercice 1. Montrer que les applications suivantes définissent des produits scalaires :

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & P(1)Q(1)+P(2)Q(2)+P(3)Q(3) \end{cases}$
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & P(0)Q(0)+P'(0)Q'(0)+P''(0)Q''(0) \end{cases}$
3. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\mathrm{d}t \end{cases}$
4. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})\times\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_{0}^{1} t^2 f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{cases}$
5. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})\times\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_{0}^{1} (fg+f'g') \end{cases}$
6. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & X^\top Y \end{cases}$
7. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_{n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (M,N) & \longmapsto & \mathrm{tr}(M^\top N) \end{cases}$
8. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) & \longmapsto & 2xx'+xy'+x'y+2yy' \end{cases}$

Exercice 2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_0,\dots,a_n$ des réels tous distincts. Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, on note L_i le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $L_i=\displaystyle\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}$. Pour tout $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}P(a_i)Q(a_i)$.

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout $i\in[\![0,n]\!]$ et tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $(L_i|P)=P(a_i)$.
3. Montrer que la famille $(L_0,\dots,L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. En déduire que pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $P=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}P(a_i)L_i$.
5. Soit $H=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\mid \displaystyle\sum_{i=0}^{n}P(a_i)=0\right\}$. Soit $Q\in\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\mathrm{d}(Q,H)$.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Soit

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_{0}^{1} f'(t)g'(t)\mathrm{d}t+f(0)g(0). \end{cases}$$

Montrer que c'est un produit scalaire sur E.

Exercice 4. Montrer que pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\leq n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2$.
Pour quels $(x_1,\dots,x_n)$ a-t-on égalité ?

Exercice 5. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{k}\leq\frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

Exercice 6. Nature de la série de terme général : $u_n=\dfrac{1}{n^2(\sqrt{2})^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}}$.

Exercice 7. Soit $a<b$ deux réels et $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\geq(b-a)^2$.
Étudier le cas d'égalité.

Exercice 8. Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est périodique de période } 2\pi\right\}$.

1. Vérifier que E est un sev de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{cases}$ est un produit scalaire sur E.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathscr{F} = (x \mapsto \cos(kx))_{0\leq k\leq n}$ est orthogonale.
4. E est-il de dimension finie ?

Exercice 9. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t \end{cases}$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la projection orthogonale de X^4 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 10. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $A^\top AX = 0_n \iff AX = 0_n$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top A)$.
3. Montrer alors que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.

Exercice 11. Soit E un espace euclidien. Si $v \in E$, on note $\varphi_v \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ la forme linéaire définie par $\varphi_v(x) = \langle v, x\rangle$.

1. Montrer que l'application $\Phi : v \in E \mapsto \varphi_v \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ est un isomorphisme.
2. Soit $H \subset E$. Montrer que H est un hyperplan de E ssi c'est l'orthogonal d'un vecteur non nul.
3. On prend $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
   Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul. On pose $H = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$.
   Justifier que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et donner un vecteur normal à H. Déterminer ensuite la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Exercice 12. On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = x-y+z-t = 0\right\}$.

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. On prend $u = (1,2,3,4)$. Calculer $d(u,F)$.

Exercice 13. $\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire usuel. On pose $u = (1,1,1,0)$ et $v = (1,1,0,1)$ et $F = \mathrm{Vect}(u,v)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 14. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\mathrm{e}^x - ax - b)^2\mathrm{d}x$.

Exercice 15. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $A, B \in E$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que pour tout $A \in E$, $\mathrm{tr}(A) \leq \sqrt{n\,\mathrm{tr}(A^\top A)}$. Quand a-t-on égalité ?
3. Soit $H = \{M \in E \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$. Justifier que H est un sev de E et déterminer $H^\perp$.
4. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
5. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit $A \in E$. Montrer que $\displaystyle\inf_{S\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1\leq i,j\leq n} ([A]_{ij} - [S]_{ij})^2 = \frac{1}{4}\sum_{1\leq i,j\leq n} ([A]_{ij} - [A]_{ji})^2$.

Indications - Solutions

Exercice 1 :

1. Symétrie, bilinéarité, positivité : Facile. Définie positive : Prenons $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$. Alors $P^2(1) = 0$, $P^2(2) = 0$ et $P^2(3) = 0$, donc P a trois racines distinctes. Comme P est de degré au maximum 2, $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.
2. Symétrie, bilinéarité, positivité : Facile. Définie positive : Prenons $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$. Alors $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$ et $P''(0) = 0$: 0 est racine triple de P. Comme $\deg(P) \leq 2$, P est le polynôme nul.
3. Symétrie, bilinéarité : Facile. Positivité : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme pour tout $t \in [-1,1]$, $1-t^2 \geq 0$, on a $P(t)^2(1-t^2) \geq 0$, donc $\langle P, P\rangle \geq 0$. Définie positive : si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\langle P, P\rangle = 0$, alors pour tout $t \in [-1,1]$, $P(t)^2(1-t^2) = 0$, donc pour tout $t \in]-1,1[$, $P(t) = 0$. P a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.
4. Symétrie, bilinéarité, positivité : Facile. Définie positive : soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\langle f, f\rangle = 0$. Alors $t \mapsto t^2 f(t)^2$ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$ d'intégrale nulle : c'est la fonction nulle. Donc pour tout $t \in]0,1]$, $f(t) = 0$. Par continuité, $f(0) = 0$.
5. Symétrie, bilinéarité, positivité : Facile. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\langle f, f\rangle = 0$. Alors $t \mapsto f(t)^2 + f'(t)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle. C'est la fonction nulle. Donc pour tout $t \in [0,1]$, $f(t)^2 + f'(t)^2 = 0$, donc $f(t) = 0$.
6. Symétrie : soit $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, Y\rangle = X^\top Y = (X^\top Y)^\top = Y^\top X = \langle Y, X\rangle$. Bilinéarité : facile. Positivité : soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, X\rangle = X^\top X = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$. Définie positive : soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\langle X, X\rangle = 0$, alors $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$, donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = 0$ car tous les termes sont positifs, et $X = 0$.
7. Symétrie : soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B) = \operatorname{tr}((A^\top B)^\top) = \operatorname{tr}(B^\top A) = \langle B, A\rangle$. Bilinéarité : facile! Positivité : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(A^\top A)_{ii} = \sum_{k=1}^n A_{ki}^2$. Donc $\operatorname{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ki}^2 \geq 0$. Définie positivité : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\langle A, A\rangle = \sum_{i,k} A_{ki}^2 = 0$. Alors pour tout $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $A_{ik}^2 = 0$ car tous les termes de la somme sont positifs.
8. Symétrie, bilinéarité : facile. Positivité : soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2(x+y/2)^2 + y^2/2 \geq 0$. Définie positive : si $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0$, alors $y^2/2 = 0$ donc $y = 0$ et $(x+y/2)^2 = 0$, donc $x = 0$.

Exercice 2 :

1.
   - Symétrie : soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P|Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i) = \sum_{i=0}^n Q(a_i)P(a_i) = (Q|P)$.
   - Bilinéarité : soit $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
   $$(\lambda P + Q|R) = \sum_{i=0}^n (\lambda P + Q)(a_i)R(a_i) = \lambda \sum_{i=0}^n P(a_i)R(a_i) + \sum_{i=0}^n Q(a_i)R(a_i) = \lambda(P|R) + (Q|R)$$
   donc $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche, donc par symétrie elle est bilinéaire.
   - Positivité : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P|P) = \sum_{i=0}^n P(a_i)^2 \geq 0$ car tous les termes sont positifs.
   - Définie positive : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $(P|P) = 0 = \sum_{i=0}^n P(a_i)^2$. Or une somme de nombres positifs est nulle ssi tous les nombres sont nuls : $\forall i \in [\![0,n]\!] P(a_i)^2 = 0$. Ainsi, P a $n+1$ racines. Comme $\deg(P) \leq n$, $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
2. Soit $i \in [\![0,n]\!]$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On remarque déjà que si $j \neq i$, alors $L_i(a_j) = 0$ et $L_i(a_i) = 1$. Donc $(L_i|P) = \sum_{j=0}^n L_i(a_j)P(a_j) = P(a_i)$.
3.
   - Soit $i \in [\![0,n]\!]$, $(L_i|L_i) = L_i(a_i) = 1$;
   - Soit $i, j \in [\![0,n]\!]$ avec $i \neq j$, $(L_i|L_j) = L_j(a_i) = 0$.

   Donc $(L_0, \ldots, L_n)$ est une famille orthonormée. Son cardinal est égal à $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc c'est une base orthonormée.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^n (P|L_i)L_i = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i$.
5. Déjà, H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ car c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle. On remarque de plus que $H = \operatorname{Vect}(1)^\perp$. Puis, $\operatorname{Vect}(1)$ a une BON formée du seul vecteur $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \in \mathbb{R}_n[X]$. On calcule le projeté orthogonal de Q sur $\operatorname{Vect}(1)$: $p(Q) = (Q, 1/\sqrt{n+1})\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{i=0}^n \frac{Q(a_i)}{n+1}$. Puis, on calcule sa norme $\sqrt{(p(Q)|p(Q))} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left|\sum_{i=0}^n Q(a_i)\right|$.

Exercice 3 :

- Symétrie : soit $f, g \in E$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'g' + f(0)g(0) = \int_0^1 g'f' + g(0)f(0) = \langle g, f\rangle$.
- Bilinéarité : soit $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\langle f + \lambda g, h\rangle = \int_0^1 (\lambda f + g)'h' + (\lambda f + g)(0)h(0) = \lambda \int_0^1 f'h' + \lambda f(0)h(0) + \int_0^1 g'h' + g(0)h(0) = \lambda\langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$$
donc on a la linéarité à gauche. Par symétrie, on a la bilinéarité.

- Positivité : soit $f \in E$, $\langle f, f\rangle = \int_0^1 (f')^2 + f(0)^2 \geq 0$ par positivité de l'intégrale.
- Définie positivité : soit $f \in E$ telle que $\langle f, f\rangle = 0$. Alors $f(0)^2 = 0$ et $\int_0^1 (f')^2 = 0$ car la somme de deux réels positifs est nulle ssi les deux sont nuls.
  Or, la fonction $(f')^2$ est continue et positive sur $[0,1]$. Comme son intégrale est nulle, pour tout $t \in [0,1]$, $f'(t)^2 = 0$, donc $f'(t) = 0$: f est donc constante sur $[0,1]$. Comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle.

Exercice 4 : On considère le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$: pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. On applique Cauchy-Schwarz à $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (1, \dots, 1) \in R^n$: on a $\|y\| = \sqrt{n}$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ et $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \text{ donc en passant au carré } \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Exercice 5 : On reprend le produit scalaire de l'exercice précédent en prenant $x = (1, 2, \dots, n)$ et $y = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n})$: on a $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n k^2} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$, $\|y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n k} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$, et $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n k\sqrt{k}$:

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)n(n+1)}{12}} = \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

Exercice 6 : On utilise le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et on applique Cauchy-Schwarz à $x = (\sqrt{\binom{n}{0}}, \sqrt{\binom{n}{1}}, \dots, \sqrt{\binom{n}{n}})$ et $y = (1, 1, \dots, 1)$:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \|x\|\,\|y\| = \sqrt{n+1}\sqrt{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}} = \sqrt{n+1}2^{n/2}.$$

Donc $u_n \leq \frac{\sqrt{n+1}\sqrt{2}^n}{n^2(\sqrt{2})^n} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$. Par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ converge.

Exercice 7 : On utilise le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}$ défini sur $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ (voir cours). On applique Cauchy-Schwarz à la fonction f et $\frac{1}{f}$ (qui est bien continue car f ne s'annule pas) : on a $\langle f, 1/f\rangle = \int_a^b 1\mathrm{d}t = (b-a)$, donc

$$(b-a)^2 \leq \|f\|^2\,\|1/f\|^2 = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 8 :

1. - La fonction nulle est bien continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
   - Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)(x + 2\pi) = \lambda f(x + 2\pi) + g(x + 2\pi) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$. Donc $\lambda f + g \in E$.
2. - Symétrie : ok.
   - Bilinéarité : ok.
   - Positivité : ok.
   - Définie positivité : soit $f \in E$ telle que $\langle f, f\rangle = 0$. Alors la fonction f^2 est continue, positive sur $[0, 2\pi]$ et d'intégrale nulle. Par positivité de l'intégrale, f^2 est nulle sur $[0, 2\pi]$. Comme f est 2π-périodique, elle est nulle partout.
3. Notons $g_k : x \mapsto \cos(kx)$. Soit $k, \ell \in [\![0, n]\!]$ avec $k \neq \ell$. On a $\cos(kx)\cos(\ell x) = \frac{1}{2}(\cos((k+\ell)x) + \cos((k-\ell)x))$, donc $\langle g_k, g_\ell\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos((k+\ell)x) + \cos((k-\ell)x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi}(\frac{1}{k+\ell}[\sin((k+\ell)x)]_0^{2\pi} + \frac{1}{k-\ell}[\sin((k-\ell)x)]_0^{2\pi} = 0$, le calcul ayant un sens car $k \neq \ell$.
   Donc la famille est orthogonale.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc une famille libre de cardinal $n+1$ dans E. Donc E ne peut pas être de dimension finie !

Exercice 9 :

1. - Symétrie : ok.
   - Bilinéarité : ok.
   - Positivité : ok.
   - Définie positivité : soit $P \in E$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$. Alors la fonction $t \mapsto P(t)$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$. Par positivité de l'intégrale, $\forall t \in [-1, 1]$, $P(t) = 0$. Donc P a une infinité de racines : c'est le polynôme nul.

2. Posons $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2$.
   - $\|P_0\| = \sqrt{2}$, donc $Q_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
   - $\langle P_0, P_1\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0$ par imparité ;
   - $\|P_1\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$, donc $Q_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
   - $\langle P_0, P_2\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$ et $\langle P_1, P_2\rangle = 0$, donc on pose $\tilde{Q}_2 = P_2 - \langle P_0, P_2\rangle \dfrac{P_0}{\|P_0\|^2} = X^2 - \dfrac{1}{3}$;
   - $\|\tilde{Q}_2\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2-1/3)^2\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^4\mathrm{d}t - \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t + \frac{1}{9}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$, donc $Q_2 = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(X^2 - \dfrac{1}{3})$.
3. Notons p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$: $p(X^4) = \langle X^4, Q_0\rangle Q_0 + \langle X^4, Q_1\rangle Q_1 + \langle X^4, Q_2\rangle Q_2$. Or, par parité, $\langle X^4, Q_1\rangle = 0$. Puis, $\langle X^4, Q_0\rangle = \dfrac{2}{5\sqrt{2}}$ et $\langle X^4, Q_2\rangle = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(\dfrac{2}{7} - \dfrac{2}{15}) = \dfrac{8\sqrt{5}}{35\sqrt{2}}$.
   D'où, $p(X^4) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{6}{7}(X^2 - 1/3) = \dfrac{6}{7}X^2 - \dfrac{3}{35}$.

Exercice 10 :

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Si $AX = 0_n$, alors $A^\top AX = A^\top 0_n = 0_n$. Réciproquement, si $A^\top AX = 0_n$, alors $X^\top A^\top AX = 0_n$. Or $X^\top A^\top AX = (AX)^\top(AX) = \langle AX, AX\rangle$ pour le produit scalaire usuel. Donc $AX = 0_n$ par définie positivité.
2. On a $\dim(\ker(A^\top A)) = \dim(\ker(A))$ d'après la question précédente. Donc d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top A)$.
3. Déjà, $\mathrm{rg}(A^\top A) \le \mathrm{rg}(A^\top)$ d'après les propriétés du rang. Donc $\mathrm{rg}(A) \le \mathrm{rg}(A^\top)$. Or, en appliquant cette inégalité à la matrice $A^\top$, on trouve $\mathrm{rg}(A^\top) \le \mathrm{rg}((A^\top)^\top) = \mathrm{rg}(A)$. D'où l'égalité.

Exercice 11 :

1.
   - Linéarité : soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in E$:
   $$\Phi(\lambda u + v)(x) = \langle \lambda u + v, x\rangle = \lambda\langle u, x\rangle + \langle v, x\rangle = \lambda\Phi(u)(x) + \Phi(v).$$
   - Injectivité : soit $v \in \ker(\Phi)$. Alors pour tout $x \in E$, $\Phi(v)(x) = 0$, donc $\langle v, x\rangle = 0$. En particulier, $\langle v, v\rangle = 0$. Par définie positivité du produit scalaire, $v = 0_E$.
   - Comme $\dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{R})) = \dim(E)\dim(\mathbb{R}) = \dim(E)$, Φ est automatiquement un isomorphisme.
2. Soit $v \in E$ non nul. Supposons que $H = v^\perp$. Alors, φ_v est une forme linéaire non nulle, donc $\ker(\varphi_v)$ est un hyperplan. Or, $\ker(\varphi_v) = \{x \in E \mid \langle v, x\rangle = 0\} = v^\perp = H$.
   Supposons que H est un hyperplan. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ telle que $H = \ker(\varphi)$. D'après la question précédente, il existe $v \in E$ tel que $\varphi = \Phi(v)$. Donc $H = \ker(\varphi_v) = v^\perp$.
3. Soit $v = (a_1, \dots, a_n)$. Alors $H = v^\perp$. Donc H est un hyperplan et v est normal à H.
   Notons p la projection orthogonale sur $H^\perp$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle e_i, v\rangle = a_i$, donc $p(e_i) = a_i\dfrac{v}{\|v\|^2} = \dfrac{a_i}{\sum a_i^2}v$. La matrice cherchée est donc : $I_n - \dfrac{1}{\sum a_i^2}\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_3a_1 & \dots & a_na_1 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_3a_2 & \dots & a_na_2 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & \dots & a_na_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 :

1. Déjà, $F = \mathrm{Vect}((0,1,0,-1),(1,0,-1,0))$, donc $\dim(F) = 2$. Son orthogonal est de dimension 2 aussi. Puis, on remarque que $u = (1,1,1,1)$ et $v = (1,-1,1,-1)$ sont dans $F^\perp$ (voir exercice 11). On orthonormalise :
   - $\|u\| = 2$, donc on pose $e_1 = \dfrac{1}{2}(1,1,1,1)$;
   - $\langle u, v\rangle = 0$;
   - $\|v\| = 2$, donc on pose $e_2 = \dfrac{1}{2}(1,-1,1,-1)$.
2. On peut commencer par la matrice de $p_{F^\perp}$: $p_{F^\perp}(1,0,0,0) = \dfrac{1}{2}e_1 + \dfrac{1}{2}e_2 = (1,0,1,0)$, etc... donc $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(p_{F^\perp}) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Puis, $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(p_F) = I_4 - \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(p_{F^\perp})$.
3. $d(u, F) = \big\|p_{F^\perp}(u)\big\|) = \|5e_1 - e_2\| = \|(2,3,2,3)\| = \sqrt{26}$.

Exercice 13 : On orthonormalise (u, v) :

- $\|u\| = \sqrt{3}$, donc $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)$;

- $\tilde{f}_2 = v - \langle v, u\rangle \dfrac{u}{\|u\|^2} = (1,1,0,1) - \dfrac{2}{3}(1,1,1,0) = (\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, 1)$;
- $\|\tilde{f}_2\| = \sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}+1} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$, donc $f_2 = (\dfrac{1}{\sqrt{15}}, \dfrac{1}{\sqrt{15}}, -\dfrac{2}{\sqrt{15}}, \dfrac{3}{\sqrt{15}})$.

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique et p la projection orthogonale sur F :

- $p(e_1) = \langle e_1, f_1\rangle f_1 + \langle e_1, f_2\rangle f_2 = \dfrac{1}{3}(1,1,1,0) + \dfrac{1}{15}(1,1,-2,3) = (2/5, 2/5, 1/5, 1/5)$
- $p(e_2) = (2/5, 2/5, 1/5, 1/5)$
- $p(e_3) = \dfrac{1}{3}(1,1,1,0) - \dfrac{2}{15}(1,1,-2,3) = (1/5, 1/5, 3/5, -2/5)$
- $p(e_4) = \dfrac{3}{15}(1,1,-2,3)$.

On en déduit la matrice !

Exercice 14 : On prend le produit scalaire : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$ sur $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On veut projeter $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}_1[x]$. On orthonormalise : $e_1 : x \mapsto 1$ et $e_2 : x \mapsto x$. On obtient $f_1 : x \mapsto 1$ et $f_2 : x \mapsto 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$. Puis on projette : $p(f)(x) = \langle f, f_1\rangle f_1(x) + \langle f, f_2\rangle f_2(x) = \mathrm{e}^1 - 1 + \sqrt{3}(3 - \mathrm{e}^1)(2\sqrt{3}x - \sqrt{3}) = -10 + 4\,\mathrm{e}^1 + 6(3 - \mathrm{e}^1)x$. Il ne reste plus qu'à calculer $\|f - p(f)\|^2 = \displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^x + 10 - 4\,\mathrm{e}^1 - 6(3-\mathrm{e}^1)x)^2 \mathrm{d}x = -\dfrac{7}{2}\mathrm{e}^2 + 20\,\mathrm{e}^1 - \dfrac{57}{2}$.

Exercice 15 :

1. - Symétrie : soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B) = \mathrm{tr}((A^\top B)^\top) = \mathrm{tr}(B^\top A) = \langle B, A\rangle$.
   - Bilinéarité : facile !
   - Positivité : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(A^\top A)_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^n A_{ki}^2$. Donc $\mathrm{tr}(A^\top A) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ki}^2 \geq 0$.
   - Définie positivité : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\langle A, A\rangle = \displaystyle\sum_{i,k} A_{ki}^2 = 0$. Alors pour tout $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $A_{ik}^2 = 0$ car tous les termes de la somme sont positifs.
2. On applique Cauchy-Schwarz A et I_n : $\langle A, I_n\rangle = \mathrm{tr}(A)$, $\|I_n\| = \sqrt{n}$, donc $\mathrm{tr}(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}(A^\top A)}$. On a égalité ssi A et I_n sont colinéaires, c'est-à-dire ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \lambda I_n$.
3. L'application tr est une forme linéaire non nulle, donc $H = \ker(\mathrm{tr})$ est un hyperplan de E. $H^\top$ est de dimension 1, or $\forall M \in H$, $\langle M, I_n\rangle = \mathrm{tr}(M) = 0$, donc $I_n \in H^\top$. Donc $H^\top = \mathrm{Vect}(I_n)$.
4. Ce sont bien des sev de E. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$: $\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}(M^\top N) = \mathrm{tr}(MN) = \langle N, M\rangle = -\mathrm{tr}(NM) = -\mathrm{tr}(MN)$, donc $\langle M, N\rangle = 0$. Ainsi, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\top$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\top$. Notons $s = \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))$ et $a = \dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))$. On sait (!) que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires, donc $a + s = n^2$. Donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
5. On a $M = \dfrac{M + M^\top}{2} + \dfrac{M - M^\top}{2}$, donc le projeté est $\dfrac{M + M^\top}{2}$.
6. On remarque que $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} (A_{ij} - S_{ij})^2 = \|A - S\|^2$. La borne inférieure est atteinte pour $S = \dfrac{A + A^\top}{2}$: on a $A - \dfrac{A + A^\top}{2} = \dfrac{A - A^\top}{2}$, la valeur cherchée est $\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} (A_{ij}^2 - A_{ji}^2)$.