Déterminants - Exercices

Exercice 1. 1. Soit n un entier impair et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $\det(A) = 0$.

2. Le résultat précédent est-il encore vrai si n est pair ?

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 19 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. Calculer sous forme factorisée :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Exercice 4. 1. Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

2. En déduire

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. On note C_1, C_2, C_3 et C_4 ses colonnes. Calculer $\det(C_1+C_3, C_2+C_4, C_1-C_3, C_2-C_4)$ en fonction de $\det(M)$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants de taille n suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & ⋰ & a_2 & 0 \\ 0 & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (\max(i,j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = (\min(i,j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det(M)$ et $\det(N)$.

Exercice 8. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. Soit $D = \begin{pmatrix} c & b & \dots & b \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne contenant que des 1. On pose $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \det(D + tU)$.

1. Montrer que P est une fonction affine.
2. Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$.
3. Calculer $\det(D)$.
4. Calculer $\det(D)$ lorsque $a = b$.

Exercice 9. Soit a, b, c trois réels et n un entier naturel non nul. On note

$$T_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et } \Delta_n = \det(T_{a,b,c}).$$

1. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \geq 3$, $\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta\Delta_{n-2}$.

2. On suppose que $X^2-\alpha X+\beta$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2. Déterminer l'expression de Δ_n en fonction de r_1, r_2 et n.

Exercice 10. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $E=\{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid y''+ay'+by=0\}$ qui est un sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
On prend $h \in \mathbb{R}$ et on considère l'application φ_h l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $\varphi_h(f) : t \mapsto f(t+h)$.

1. Montrer que φ_h est un endomorphisme de E.
2. Calculer $\det(\varphi_h)$.

Exercice 11. Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P)=XP'+P(1)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(u)$.
3. u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 12. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $u : A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13. Soit $A=\begin{pmatrix}5&2&2\\2&5&2\\1&1&4\end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\chi_A(x)=\det(xI_3-A)$.
2. Déterminer les racines de χ_A.
3. Pour chaque racine λ de χ_A déterminer une base de $E_\lambda=\ker(\lambda I_3-A)$.
4. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $D=P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le déterminant de Vandermonde de $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n$ est défini par :

$$V(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

1. On suppose qu'il existe $i \neq j$ tels que $a_i=a_j$. Que vaut $V(a_1,\dots,a_n)$?
2. On suppose maintenant que $a_1,\dots,a_n$ sont deux à deux distincts. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x)=V(a_1,\dots,a_{n-1},x)$.
   (a) Justifier que P est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   (b) Déterminer le coefficient de degré $n-1$ de P.
   (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)=V(a_1,\dots,a_{n-1})\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(x-a_k)$.
   (d) En déduire l'expression de $V(a_1,\dots,a_n)$ en fonction de $a_1,\dots,a_n$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m_{i,j}$ $(1 \leq i,j \leq n)$ n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ et telles que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, P(m_{i,j}=1)=P(m_{i,j}=-1)=\frac{1}{2}.$$

On note $M_n=(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\delta_n=\det(M_n)$.
Calculer $E(\delta_n)$.

Exercice 16. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2=I_n$. Calculer $\det(M)$ en fonction de $\mathrm{tr}(M)$.
On rappelle que pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

Indications - Solutions

Exercice 1 :

1. D'une part, $\det(A) = \det(A^\top)$ d'après le cours. D'autre part, $A^\top = -A$, donc $\det(A^\top) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$. D'où $\det(A) = -\det(A)$ et $\det(A) = 0$.
2. Non, par exemple, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique, mais son déterminant vaut 1.

Exercice 2 : Pour D_1 et D_2 on peut appliquer la règle de Sarrus et on trouve $D_1 = 28$ et $D_2 = -1$.
Pour D_3 et D_4 on commence par faire des opérations sur les lignes pour faire apparaître pas mal de 0 (par exemple dans la première colonne) et on trouve : $D_3 = -15$ et $D_4 = 0$.
Exercice 3 :

1. $D_1 = 2abc$,
2. On ajoute C_2 et C_3 à C_1 : $D_2 = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)((a-b)(a-c)+(b-c)^2) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ab-ac)$.
3. $D_3 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$.

Exercice 4 :

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = abc(c(c-a)(b-a)-b(c-a)(b-a)) = abc(c-a)(b-a)(c-b)$.
2. On utilise la linéarité et on trouve $2abc(c-a)(b-a)(c-b)$.

Exercice 5 : $\det(C_1+C_3, C_2+C_4, C_1-C_3, C_2-C_4) = \det(C_1, C_2, -C_3, -C_4) + \det(C_1, C_4, -C_3, C_2) + \det(C_3, C_2, C_1, -C_4) + \det(C_3, C_4, C_1, C_2) = \det(M) + \det(M) + \det(M) + \det(M) = 4\det(M)$, tous les autres termes s'annulent à cause de colonnes qui se répètent.
Exercice 6 :

1. On soustrait toutes les colonnes à la colonne 1 : $D_1 = \begin{vmatrix} 1-(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2-n$.
2. On fait $C_j \leftarrow C_j - C_n$ pour $1 \le j \le n-1$. On obtient un déterminant triangulaire supérieur dont les coefficients diagonaux sont $1-n, 2-n, \dots, 1, n$. Donc $D_2 = (-1)^{n-1} n!$.
3. On commence par ajouter toutes les colonnes à la première : $D_3 = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ puis on soustrait la première ligne à toutes les autres pour avoir un déterminant triangulaire supérieur : $D_3 = (-1)^{n-1}(n-1)$.
4. On permute les colonnes, mais attention :
   - si n est pair, $D_4 = (-1)^{n/2} a_1 \cdots a_n$;
   - si n est impair, $D_4 = (-1)^{(n-1)/2} a_1 \cdots a_n$.

Exercice 7 : Pour M, on fait $C_i \leftarrow C_i - C_{i+1}$ en commençant du bas, et on tombe sur un déterminant triangulaire inférieur : $\det(M) = n(-1)^{n-1}$. Pour N, on soustrait L_1 à toutes les autres lignes, puis on recommence avec L_2 et ainsi de suite : $\det(N) = 1$.
Exercice 8 :

1. On peut soustraire la première colonne à toutes les autres pour ne garder des t que dans la première colonne, puis on utilise la linéarité dans la première colonne.
2. $P(-a) = (c-a)^n$ et $P(-b) = (c-b)^n$.
3. Il existe m, p tels que $P(t) = mt + p$. On cherche p. On a donc $-ma + p = (c-a)^n$ et $-mb + p = (c-b)^n$. Donc $(b-a)p = b(c-a)^n - a(c-b)^n$ et comme $a \neq b$, $\det(D) = \dfrac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a}$.
4. On peut commencer par ajouter toutes les colonnes à la première puis on soustrait la première ligne à toutes les autres : $\det(D) = (c+(n-1)a)(c-a)^{n-1}$.

Exercice 9 :

1. On développe le déterminant par rapport à la première ligne :

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - b\det\begin{pmatrix} c & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & & c & a \end{pmatrix}$$

puis on re-développe ce dernier déterminant par rapport à la première colonne : $\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}$.

2. $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $X^2 - aX + bc = 0$. Il existe donc deux complexes A et B tels que $\Delta_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$.
On utilise les conditions initiales :

$$\begin{cases} Ar_1 + Br_2 = a \\ A(r_1)^2 + B(r_2)^2 = a^2 - bc \end{cases}$$

Comme les deux racines sont distinctes, on peut supposer que $r_1 \neq 0$.
En faisant $r_1 L_1 - L_2$, on obtient en utilisant les relations coefficients racines :

$$\begin{aligned} Br_2(r_1 - r_2) = a(r_1 - a) + r_1 r_2 &\iff Br_2(r_1 - r_2) = -ar_2 + r_1 r_2 \\ &\iff Br_2(r_1 - r_2) = -(r_2)^2 \\ &\iff B = -\frac{r_2}{r_1 - r_2} \end{aligned}$$

On trouve ensuite $Ar_1 = \dfrac{(r_1)^2}{r_1 - r_2}$.
Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $\boxed{\Delta_n = \dfrac{(r_1)^{n+1} - (r_2)^{n+1}}{r_1 - r_2}}$, formule qui marche même lorsque $r_1 = 0$.

Exercice 10 :

1. On commence par la linéarité. Ensuite, on vérifie que si f est solution de l'équation différentielle, $\varphi_h(f)$ l'est encore.
2. On distingue deux cas :
   - Si $a^2 - 4b \neq 0$, on a une base donnée par $(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$ et la matrice de φ_h dans cette base est diagonale. On trouve $\det(\varphi_h) = e^{(r_1+r_2)h} = e^{-ah}$.
   - Si $a^2 - 4b = 0$, on a une base donnée par $(t \mapsto e^{rt}, t \mapsto t\,e^{rt})$ et la matrice de φ_h dans cette base est triangulaire. On trouve $\det(\varphi_h) = e^{(r+r)h} = e^{-ah}$.

Exercice 11 :

1. Facile pour la linéarité, puis si $\deg(P) \leq n$, on remarque que $\deg(XP') \leq \deg(P) \leq n$ et $P(1)$ est constant.
2. On commence par chercher la matrice de u dans la base canonique : $u(1) = 1$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $u(X^k) = kX^k + 1$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(u)$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux $1, 1, 2, \ldots, n$. $\det(u) = n!$.
3. Oui car $\det(u) \neq 0$.

Exercice 12 : On commence par chercher une base sympathique pour écrire la matrice de u. On se rappelle que u est une symétrie, donc en prenant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ adaptée à la somme directe $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on trouve $\det(u) = (-1)^{\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))}$. Or $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ en prenant comme base $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$.

Exercice 13 :

1. $\chi_A(x) = (x-8)(x-3)^2$.
2. Facile.
3. $E_8 = \mathrm{Vect}((2,2,1))$ et $E_3 = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$.
4. On prend $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie que P est inversible en calculant son déterminant. Ce qui justifie que $\mathcal{B} = ((2,2,1),(1,-1,0),(1,0,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(8,3,3) = D$ et par changement de base : $D = P^{-1}AP$.

Exercice 14 :

1. $V(a_1, \ldots, a_n) = 0$ car deux colonnes sont égales.
2. (a) En développant par rapport à la dernière ligne on obtient : $P(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} x^{j-1} \Delta_{n,j}$ qui est bien une fonction polynomiale de degré au maximum $n-1$.
   (b) Le coefficient de degré $n-1$ est $(-1)^{2n}\Delta_{n,n} = V(a_1, \ldots, a_{n-1})$.
   (c) D'après la première question, P admet $a_1, \ldots, a_{n-1}$ comme racine. Donc $P = Q \times \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(x - a_k)$. En comparant les degrés, on trouve la formule voulue.

(d) On obtient $V(a_1,\dots,a_n) = V(a_1,\dots,a_{n-1})\prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)$. Par une récurrence immédiate : $V(a_1,\dots,a_n) = V(a_1)\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}(a_i - a_k) = \prod_{1\leq k<i\leq n}(a_i - a_k)$.

Exercice 15 : On développe $\det(M_n)$ par rapport à la première ligne :

$$\delta_n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} m_{1j}\Delta_{1,j}.$$

D'après le lemme des coalitions, m_{1j} et $\Delta_{1,j}$ sont indépendantes, donc

$$E(\delta_n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} E(m_{1j})E(\Delta_{1,j}).$$

Or, $E(m_{1,j}) = 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, donc $E(\delta_n) = 0$.

Exercice 16 : Déjà, $\det(M) = \pm 1$ car $\det(M)^2 = \det(M^2) = 1$. Puis, M est la matrice d'une symétrie. On note s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé. Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r}\end{pmatrix}$. Donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P^{-1}$. D'où $\det(M) = \det(P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P^{-1}) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = (-1)^{n-r}$ et $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = 2r - n$. D'où $\det(M) = (-1)^{\frac{n-\mathrm{tr}(M)}{2}}$.