Chapitre 31 : Fonctions de deux variables

I. Fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

I.1. Boules et ouverts de $\mathbb{R}^2$

On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$:

$$\|\cdot\| : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}. \end{array} \right.$$

Définition I.1. Soit $r \geq 0$ et $a \in \mathbb{R}^2$.

1. La **boule fermée** centrée en a et de rayon r est l'ensemble :
$$\overline{B}(a,r) = \left\{ b \in \mathbb{R}^2 \mid \|b-a\| \leq r \right\}.$$
2. La **boule ouverte** centrée en a et de rayon r est l'ensemble :
$$B(a,r) = \left\{ b \in \mathbb{R}^2 \mid \|b-a\| < r \right\}.$$

Définition I.2. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si :

$$\forall a \in U, \exists r > 0 \mid B(a,r) \subset U.$$

Proposition I.1. *Une boule ouverte est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.

I.2. Continuité d'une fonction à deux variables

Définition I.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le graphe de $\mathbb{R}$ est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. C'est la surface d'équation $z = f(x,y)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque I.1. C'est l'analogue du graphe pour une fonction d'une variable. La grosse différence est que celui-ci est une surface.

Définition I.4. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0) et on note $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x,y) \in U, \left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\| \leq \eta \Rightarrow |f(x,y)-\ell| \leq \varepsilon.$$

Définition I.5. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

1. On dit que f est **continue par rapport à la première variable** si pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est continue sur $U \cap \mathbb{R} \times \{y\}$.
2. On dit que f est **continue par rapport à la seconde variable** si pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue sur $U \cap \{x\} \times \mathbb{R}$.
3. On dit que f est **continue en** $a \in U$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall b \in U, \|b-a\| \leq \eta \Rightarrow |f(b)-f(a)| \leq \varepsilon.$$
4. On dit que f est **continue sur** U si elle est continue en a pour tout $a \in U$. On note alors $\mathscr{C}(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur U à valeurs réelles.

Remarque I.2. Si une fonction est continue sur U, alors elle est continue par rapport à chacune de ses variables. La réciproque est FAUSSE !!

Proposition I.2. *1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. La fonction f est continue en a ssi pour toute suite $(a_n) \in U^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, on a $f(a_n) \to f(a)$.*

2. La combinaison linéaire de fonctions continues est continue, le produit de fonctions continues est continue, le quotient de deux fonctions continues est continue là où il est défini.

3. Si $f \in \mathscr{C}(U, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}(U, \mathbb{R})$.

II. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

On considère maintenant un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

II.1. Dérivées partielles

Définition II.1. Soit $a = (x_0, y_0)$. On dit que f admet des **dérivées partielles** en a si les taux d'accroissements

$$\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

admettent des limites finies lorsque h et k tendent vers 0. On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Remarques II.1. 1. Ceci revient à dire que les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ sont dérivables resp. en x_0 et y_0.

2. Attention : une fonction peut avoir des dérivées partielles en a sans pour autant être continue en a !!

Définition II.2. On dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur U si f admet des dérivées partielles en tout point de U et que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ sont continues.

Dans ce cas, le **gradient** de f est l'application : $\nabla f : (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition II.1. *Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$. De plus, $fg \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ là où g ne s'annule pas.*

Proposition II.2. *Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in U$, alors on a le **développement limité à l'ordre** 1 de f en (x_0, y_0) :*

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) k + o(\|(h, k)\|). \end{aligned}$$

En particulier, f est continue en (x_0, y_0).

Remarque II.2. La plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ a pour équation : $z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$.

II.2. Règle de la chaîne

Définition II.3. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ un vecteur et $a = (x_0, y_0) \in U$. On dit que f admet une **dérivée selon le vecteur** v **en** a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0. On notera alors $\partial_u f(a)$ cette limite.

Remarque II.3. Pour $v = (1,0)$ et $v = (0,1)$ on retrouve les dérivées partielles du paragraphe précédent.

Proposition II.3. *Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $a \in U$ et soit $v \in \mathbb{R}^2$. Alors f admet une dérivée selon u en a et :*

$$\partial_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle.$$

Théorème II.4

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$, $x, y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ telles que : $\forall t \in I$, $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in U$.
Alors la fonction $t \in I \mapsto f(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. De plus, pour tout $t \in I$:

$$(f\circ\gamma)'(t) = \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) = \partial_{\gamma'(t)} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle.$$

Remarque II.4. Si $f\circ\gamma$ est constante, on dit que γ est une ligne de niveau de f. Dans ce cas, on a ∇f orthogonal à γ' : autrement dit, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.

Théorème II.5

Soit V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^1(V,\mathbb{R})$ telles que $\Phi : (u,v) \in V \mapsto (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ est à valeurs dans U.
Alors la fonction $g : (u,v) \in V \mapsto f\circ\Phi(u,v)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V et pour tout $a \in V$:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(a) = \frac{\partial}{\partial u}(f(\varphi(u,v), \psi(u,v))) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(a))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi(a))\frac{\partial \psi}{\partial v}(a)$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(a) = \frac{\partial}{\partial v}(f(\varphi(u,v), \psi(u,v))) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(a))\frac{\partial \varphi}{\partial v}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi(a))\frac{\partial \psi}{\partial v}(a)$$

III. Extrema

Définition III.1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in U$.

1. On dit que f admet un **maximum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que : $\forall b \in B(a,r) \cap U$, $f(a) \geq f(b)$.
2. On dit que f admet un **minimum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que : $\forall b \in B(a,r) \cap U$, $f(a) \leq f(b)$.
3. On dit que f admet un **maximum global** en a si : $\forall b \in U$, $f(a) \geq f(b)$.
4. On dit que f admet un **minimum global** en a si : $\forall b \in U$, $f(a) \leq f(b)$.

Définition III.2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On dit que $a \in U$ est un **point critique** de f si $\nabla f(a) = (0,0)$.

Théorème III.1

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$. Si f admet un extremum local en $a \in U$, alors a est un point critique de f.

Remarque III.1. La réciproque est bien entendu fausse!!