

Chapitre 31 : Fonctions de deux variables

I. Fonctions continues sur un ouvert de \mathbb{R}^2

I.1. Boules et ouverts de \mathbb{R}^2

On considère la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 :

$$\|\cdot\| : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Définition I.1. Soit $r \geq 0$ et $a \in \mathbb{R}^2$.

1. La **boule fermée** centrée en a et de rayon r est l'ensemble :

$$\overline{B}(a, r) = \{b \in \mathbb{R}^2 \mid \|b - a\| \leq r\}.$$

2. La **boule ouverte** centrée en a et de rayon r est l'ensemble :

$$B(a, r) = \{b \in \mathbb{R}^2 \mid \|b - a\| < r\}.$$

Définition I.2. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ une partie de \mathbb{R}^2 . On dit que U est un **ouvert** de \mathbb{R}^2 si :

$$\forall a \in U, \exists r > 0 \mid B(a, r) \subset U.$$

Exemples I.1. Dessiner puis dire si les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2 :

1. $A_1 =]0, 1[\times]0, 1[$;

2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$;

3. $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$

Proposition I.1. Une boule ouverte est un ouvert de \mathbb{R}^2 . \mathbb{R}^2 est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

I.2. Continuité d'une fonction à deux variables

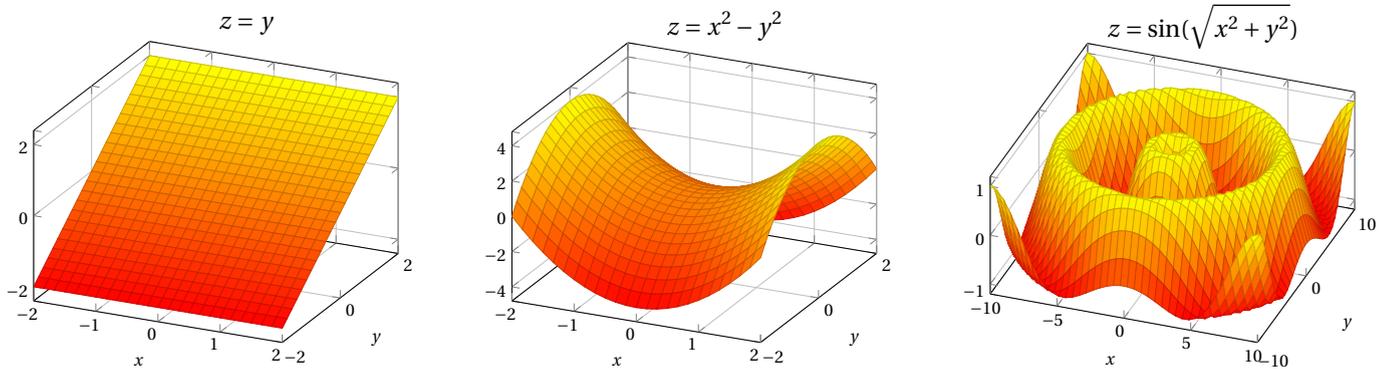
Définition I.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Le graphe de f est l'ensemble

$$\begin{aligned} \Gamma_f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} \\ &= \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3, \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

C'est la surface d'équation $z = f(x, y)$ dans \mathbb{R}^3 .

I. Fonctions continues sur un ouvert de \mathbb{R}^2

Remarque I.1. C'est l'analogie du graphe pour une fonction d'une variable. La grosse différence est que celui-ci est une surface.



Exemple I.2. Dessiner le graphe de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

Définition I.4. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0) et on note $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$ si :

.....

Définition I.5. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

1. On dit que f est **continue par rapport à la première variable** si pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur
2. On dit que f est **continue par rapport à la seconde variable** si pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur
3. On dit que f est **continue en** $a \in U$ si :

.....

4. On dit que f est **continue sur** U si elle est continue en a pour tout $a \in U$. On note alors $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur U à valeurs réelles.

Proposition I.2. 1. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. La fonction f est continue en a ssi pour toute suite $(a_n) \in U^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \rightarrow a$, on a $f(a_n) \rightarrow f(a)$.

2. La combinaison linéaire de fonctions continues est continue, le produit de fonctions continues est continue, le quotient de deux fonctions continues est continue là où il est défini.

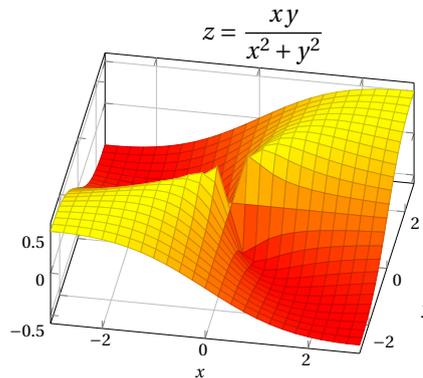
3. Si $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$.

Remarque I.2. Si une fonction est continue sur U , alors elle est continue par rapport à chacune de ses variables. La réciproque est FAUSSE!!

Exemples I.3. 1. Les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto \cos(x - y)$ sont continues sur \mathbb{R}^2

I. Fonctions continues sur un ouvert de \mathbb{R}^2

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Montrer que f est continue par rapport à chacune des deux variables, mais qu'elle n'est pas continue en $(0, 0)$.
Un petit dessin pour vous aider :



3. Montrer que $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

4. Montrer que $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^6}{x^2 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

5. Montrer que $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

II. Fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2

On considère maintenant un ouvert non vide U de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

II.1. Dérivées partielles

Définition II.1. Soit $a = (x_0, y_0) \in U$. On dit que f admet des **dérivées partielles** en a si les taux d'accroissements

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

admettent des limites finies lorsque h et k tendent vers 0. On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

- Remarques II.1.*
1. Ceci revient à dire que les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ sont dérivables resp. en x_0 et y_0 .
 2. Attention : une fonction peut avoir des dérivées partielles en a sans pour autant être continue en a !!

Exemple II.1. Soit $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$, mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Définition II.2. On dit que f est de **classe \mathcal{C}^1** sur U si f admet des dérivées partielles en tout point de U et que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ sont continues.

Dans ce cas, le **gradient** de f est l'application : $\nabla f : (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \in \mathbb{R}^2$.

Exemples II.2. Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert à préciser et calculer son gradient :

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 + yx + e^y$

II. Fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2

2. $f : (x, y) \mapsto xy + \ln(x)\sqrt{y-1}$

3. $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$

4. $f : (x, y) \mapsto \ln(xy)$

Proposition II.1. Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$;
- $fg \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$;
- $\frac{f}{g}$ est de classe \mathcal{C}^1 là où g ne s'annule pas ;
- $h \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

- Exemples II.3.** 1. Les fonctions polynomiales (des combinaisons linéaires de $x^k y^j$, avec $k, j \in \mathbb{N}$) sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
 2. La fonction $(x, y) \mapsto e^{x+3y} - xy^2$ est

Proposition II.2. Si f est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in U$, alors on a le **développement limité à l'ordre 1** de f en (x_0, y_0) :

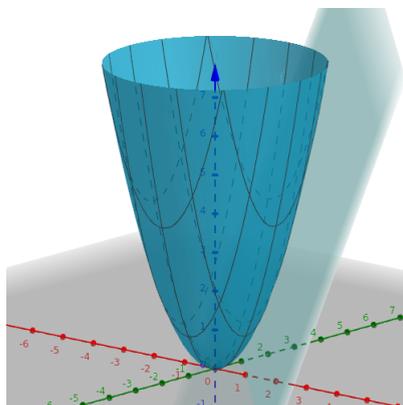
$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$$

$$\underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} \dots\dots\dots$$

En particulier, f est continue en (x_0, y_0) .

Remarque II.2. Le plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ a pour équation : $z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$.

Exemple II.4. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 puis déterminer l'équation du plan tangent à Γ_f au point $(1, 1)$. Voici le dessin :



II.2. Règle de la chaîne

Définition II.3. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ un vecteur et $a = (x_0, y_0) \in U$. On dit que f admet une **dérivée selon le vecteur v en a** si le taux d'accroissement $\frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0. On notera alors $\partial_u f(a)$ cette limite.

Remarque II.3. Pour $v = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$ on retrouve les dérivées partielles du paragraphe précédent.

Proposition II.3. Soit f de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $a \in U$ et soit $v \in \mathbb{R}^2$. Alors f admet une dérivée selon u en a et :

$$\partial_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle.$$

Théorème II.4

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que : $\forall t \in I, \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in U$.

Alors la fonction $t \in I \mapsto f(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I . De plus, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= \partial_{\gamma'(t)} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Remarque II.4. Si $f \circ \gamma$ est constante, on dit que γ est une ligne de niveau de f . Dans ce cas, on a ∇f orthogonal à γ' : autrement dit, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f .

Exemples II.5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 . Déterminer les dérivées de $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(e^t, 3t + 1)$ et $h : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t, t)$.

Théorème II.5

Soit V un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 et $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ telles que $\Phi : (u, v) \in V \mapsto (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est à valeurs dans U .

Alors la fonction $g : (u, v) \in V \mapsto f \circ \Phi(u, v)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur V et pour tout $a \in V$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(a) &= \frac{\partial}{\partial u}(f(\varphi(u, v), \psi(u, v))) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(a)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi(a)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(a) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(a) &= \frac{\partial}{\partial v}(f(\varphi(u, v), \psi(u, v))) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(a)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi(a)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(a) \end{aligned}$$

Exemples II.6. 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer les dérivées partielles de $g : (u, v) \mapsto f(uv, u^2)$, $h : (u, v) \mapsto f(u^2 + v^2, uv)$, $k : (x, y) \mapsto f(f(x, y), f(x, y))$, et $\ell : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

2. On veut résoudre l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On pose $g : (u, v) \mapsto f(u + v, u - v)$. Justifier que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et qu'elle vérifie $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ puis en déduire les solutions de l'équation de départ.

III. Extrema

Définition III.1. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in U$.

1. On dit que f admet un **maximum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que : $\forall b \in B(a, r) \cap U, \dots\dots\dots$
2. On dit que f admet un **minimum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que : $\forall b \in B(a, r) \cap U, \dots\dots\dots$
3. On dit que f admet un **maximum global** en a si : $\forall b \in U, \dots\dots\dots$
4. On dit que f admet un **minimum global** en a si : $\forall b \in U, \dots\dots\dots$

Définition III.2. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On dit que $a \in U$ est un **point critique** de f si $\nabla f(a) = (0, 0)$.

Théorème III.1

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Si f admet un **extremum local** en $a \in U$, alors a est un **point critique** de f .

Remarque III.1. La réciproque est bien entendu fausse!!

Exemples III.1. 1. Déterminer les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ puis déterminer les extrema de f sur \mathbb{R}^2 .

2. Déterminer les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ puis déterminer les extrema de f sur \mathbb{R}^2 .

III. Extrema

3. Déterminer les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^4$ puis déterminer les extrema de f sur \mathbb{R}^2 .

4. Déterminer les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - xy$ puis déterminer les extrema de f sur \mathbb{R}^2 .