Fonctions de deux variables - Exercices

Exercice 1. Représenter graphiquement les parties du plan suivantes :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq x\}$;
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } y + x - 3 \geq 0\}$;
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$;
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 \geq 1\}$;
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } 3y + x - 12 \leq 0 \text{ et } 3x + y - 12 \leq 0\}$;
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| < 1 \text{ et } x - y < 1\}$;

Lesquelles sont des ouverts ? Pourquoi ?

Exercice 2. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à préciser et calculer leurs dérivées partielles :

1. $f_1(x, y) = x^2 + y^2$
2. $f_2(x, y) = \arctan(2x + y)$
3. $f_3(x, y) = \cos(xy)$
4. $f_4(x, y) = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$
5. $f_5(x, y) = \sqrt{2y - x}$
6. $f_6(x, y) = \ln(x + y)$

Exercice 4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées partielles :

1. $f(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$
2. $g(x, y) = \varphi(xy)$
3. $h(x, y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5. Pour chaque fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$, déterminer l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point A :

1. $f(x, y) = \cos(x - y)$ et $A\left(\dfrac{\pi}{2}, 0, f\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)\right)$;
2. $f(x, y) = x^2 - y^2$ et $A(0, 0, 0)$;
3. $f(x, y) = x\left(\ln(x)^2 + y^2\right)$ et $A\left(\mathrm{e}^{-1}, 1, 2\,\mathrm{e}^{-1}\right)$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Justifier que $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(0, t) + f(t, t^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Justifier que $h_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(y, x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
3. Même question pour $h_2 : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u + v, 2v)$.
4. Même question pour $h_3 : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(uv, u^2 + v^2)$.

Exercice 7. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. La fonction f admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?
3. La fonction f admet-elle un extremum global en $(0, 0)$?
4. Montrer que f n'admet pas d'extremum global en $(1, 1)$.
5. (a) Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ avec $|h| \leq 1$ et $|k| \leq 1$. Montrer que $f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1) \geq 2h^2 - 3hk + 2k^2$.
   (b) En déduire que f admet un extremum local en $(1, 1)$.

Exercice 8. Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f_1(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$
2. $f_2(x, y) = x^3 + y^3$
3. $f_3(x, y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$
4. $f_4(x, y) = x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$.

Exercice 9. On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

On considère une solution f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. Soit $u : (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[\mapsto r\cos(\theta)$ et $v : (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[\mapsto r\sin(\theta)$ et $g(r,\theta) = f(u(r,\theta), v(r,\theta))$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
2. En déduire que g vérifie : $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[, \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$.
3. Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ qui sont solutions de l'EDP de départ.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}^*$ si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, \quad f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

1. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et homogène de degré α. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto f(tx,ty)$. En calculant la dérivée de g de deux façons différentes, montrer que :

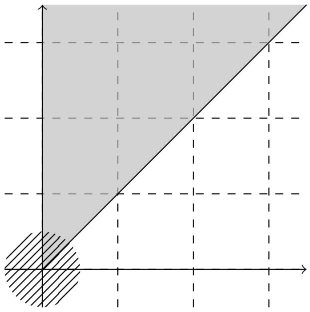
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y). \tag{*}$$

2. Réciproquement, on considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que si f vérifie l'EDP (*), alors f est homogène de degré α.
3. Montrer que les seules fonctions homogènes de degré 1 sont de la forme $(x,y) \mapsto ax + by$.

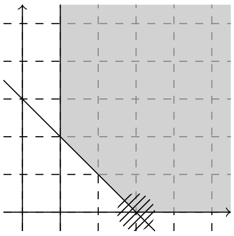
Indications - Solutions

Exercice 1 :

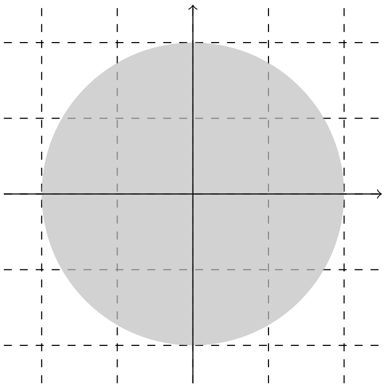
1. Non, ce n'est pas un ouvert : par exemple, le point $(0,0)$ est dans A, mais si on prend une boule centrée en $(0,0)$, elle ne sera jamais complètement incluse dans A.



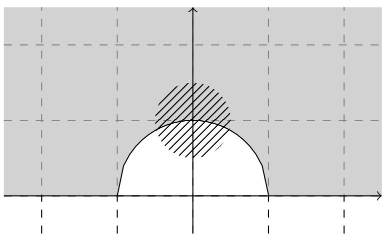
2. Non ce n'est pas un ouvert : on peut regarder les boules centrées en $(3,0) \in B$.



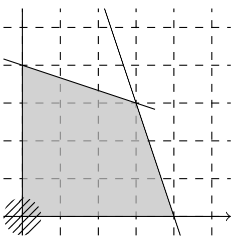
3. Oui, c'est un ouvert : c'est la boule ouverte $B((0,0),2)$.



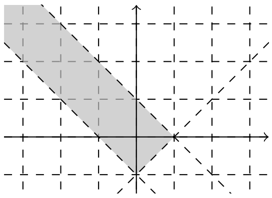
4. Non, ce n'est pas un ouvert : on peut regarder les boules centrées en $(0,1) \in D$.



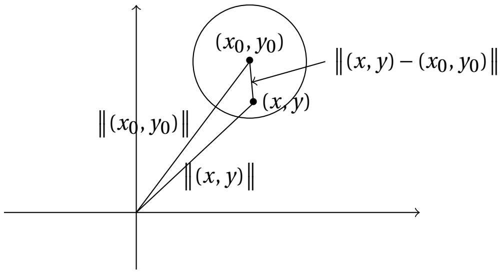
5. Non, ce n'est pas un ouvert : on peut regarder les boules centrées en $(0,0)$ par exemple.



6. Oui, c'est un ouvert, on peut le voir sur le dessin !



Exercice 2 : Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Prenons $r > 0$ tel que $r < \frac{\|(x_0,y_0)\|}{2}$. Alors $B((x_0,y_0),r) \subset \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$: en effet, si (x,y) est dans cette boule, alors $\|(x_0,y_0)\| \leq \|(x,y)\| + \|(x,y)-(x_0,y_0)\|$, donc $\|(x,y)\| \geq \|(x_0,y_0)\| - \|(x,y)-(x_0,y_0)\| > \frac{\|(x_0,y_0)\|}{2} > 0$. Donc $(x,y) \neq (0,0)$.



Exercice 3 :

1. La fonction f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations. De plus, $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2y$.
2. La fonction f_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations. De plus, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{1+(2x+y)^2}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+(2x+y)^2}$.
3. La fonction f_3 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations. De plus, $\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = -y\sin(xy)$ et $\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = -x\sin(xy)$.
4. La fonction f_4 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par opérations. De plus, $\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{(1+x^2+y^2)(x^2+y^2)^{1/2}}$ et $\frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{(1+x^2+y^2)(x^2+y^2)^{1/2}}$.
5. La fonction f_5 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\{(x,y) \mid 2y-x>0\}$. De plus, $\frac{\partial f_5}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{2y-x}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2y-x}}$.
6. La fonction f_6 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\{(x,y) \mid x+y>0\}$. De plus, $\frac{\partial f_6}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y}$ et $\frac{\partial f_6}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x+y}$.

Exercice 4 :

1. Par composition, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, de plus $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\varphi'(x^2-y^2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\varphi'(x^2-y^2)$.
2. Par composition, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, de plus $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y\varphi'(xy)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\varphi'(xy)$.
3. On pose $\Phi : x \mapsto \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$. D'après le TFA, Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(x,y) = \Phi(x+y) - \Phi(x-y)$, donc h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition. De plus, $\frac{\partial h}{\partial x} = \varphi(x+y) - \varphi(x-y)$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y)$.

Exercice 5 :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x-y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x-y)$, donc $f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 1$, donc $z = -(x-\pi/2)+y$.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, donc $f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, donc $z = 0$: c'est le plan Oxy.
3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(x)^2 + y^2 + 2\ln(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$, donc $f(\mathrm{e}^{-1},1) = 2\mathrm{e}^{-1}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{e}^{-1},1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{e}^{-1},1) = 2\mathrm{e}^{-1}$, d'où $z - 2\mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1}(y-1)$.

Exercice 6 :

1. Les fonctions $t \mapsto 0, t \mapsto t, t \mapsto t^2$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition, g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,t^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(t,t^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Les fonctions $\varphi : (x,y) \mapsto x$ et $\psi : (x,y) \mapsto y$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc par composition, h_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial u}(\psi(x,y),\varphi(x,y)) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial v}(\psi(x,y),\varphi(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial v}(y,x)$ et $\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(y,x)$.

3. Les fonctions $\varphi : (u,v) \mapsto u+v$ et $\psi : (u,v) \mapsto 2v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc h_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $\frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(u+v,2v) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(u+v,2v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u+v,2v)$ et $\frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(u+v,2v) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(u+v,2v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u+v,2v) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(u+v,2v)$.

4. Les fonctions $\varphi : (u,v) \mapsto uv$ et $\psi : (u,v) \mapsto u^2+v^2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc h_3 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $\frac{\partial h_3}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2) = v\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)$ et $\frac{\partial h_3}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2) = u\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)$.

Exercice 7 :

1. Déjà, f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$. Donc $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff x^2 = y$ et $y^2 = x$. Ainsi, on trouve $y^4 = y$, donc $y = 0$, ou $y = 1$ (les deux autres solutions étant complexes). Donc les points critiques sont $(0,0)$ et $(1,1)$.
2. Déjà, $f(0,0) = 0$, donc f admet un extremum local en $(0,0)$ ssi elle ne change pas de signe au voisinage de $(0,0)$. Si on fixe $y = 0$, on a $f(x,0) = x^3$ qui change de signe... Donc f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.
3. Encore moins!!
4. On calcule $f(1,1) = -1$. Il faut donc trouver un point où f prend une valeur plus élevée et un point où f prend une valeur plus basse. Par exemple, $f(-2,0) = -8 < f(1,1)$ et $f(2,0) = 8 > f(1,1)$, donc $(1,1)$ n'est pas un extremum local de f.
5. On calcule $f(1+h,1+k) - f(1,1) = (1+h)^3 + (1+k)^3 - 3(1+h)(1+k) + 1 = 3(h^2+k^2-hk) + h^3 + k^3$. Or, si $|h| \leq 1$ et $|k| \leq 1$, alors $-h^2 \leq h^3 \leq h^2$ et $-k^2 \leq k^3 \leq k^2$, donc $h^3 + k^3 \geq -h^2 - k^2$. D'où $f(1+h,1+k) - f(1,1) \geq 2h^2 + 2k^2 - 3hk = 2(h^2 - 3hk/2 + k^2) = 2((h-3k/4)^2 + 7k^2/16) \geq 0$. Donc f admet un minimum local en $(1,1)$.

Exercice 8 :

1. La fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On commence par chercher les points critiques : $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x+y+2$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x+2y+3$, donc $\nabla f_1(x,y) = (0,0) \iff 2x+y+2 = 0$ et $x+2y+3 = 0 \iff x = -1/3$ et $y = -4/3$. Le seul point critique est $(-1/3,-4/3)$.
On calcule $f_1(-1/3+h,-4/3+k) - f_1(-1/3,-4/3) = h^2 + hk + k^2 = (h+k/2)^2 + 3k^2/4 \geq 0$. Donc f_1 admet un minimum global en $(-1/3,-4/3)$.
2. La fonction f_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 3x^2$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 3y^2$. Donc le seul point critique est $(0,0)$. Or $f_2(x,0) > f_2(0,0)$ si $x > 0$ et $f_2(x,0) < 0$ si $x < 0$, donc f_2 n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
3. La fonction f_3 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^2 - 2xy$ et $\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = 2xy - x^2 - 3y^2$. Donc $\nabla f_3(x,y) = (0,0) \iff 3x^2 + y^2 - 2xy = 0$ et $2xy - x^2 - 3y^2 = 0$. On a $2xy = 3x^2 + y^2$, donc $2x^2 - 2y^2 = 0$ et $x = \pm y$. Dans les deux cas, on trouve $x = y = 0$. Le seul point critique est $(0,0)$.
On a $f_3(x,0) > f_3(0,0)$ si $x > 0$ et $f_3(x,0) < f_3(0,0)$ si $x < 0$. Donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
4. La fonction f_3 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y) = 2x + 2(x+y-1)$ et $\frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y) = 2(x+y-1) + 2y$. Donc $\nabla f_4(x,y) = (0,0) \iff 2x+y-1 = 0$ et $x+2y-1 = 0 \iff x = 1/3$ et $y = 1/3$. Le seul point critique est $(1/3,1/3)$.
On calcule $f_4(1/3+h,1/3+k) - f_4(1/3,1/3) = 2h^2 + 2hk + 2k^2 = h^2 + k^2 + (h+k)^2 \geq 0$. Donc f_4 admet un minimum global en $(1/3,1/3)$.

Exercice 9 :

1. On remarque déjà que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2,\pi/2[$, $(u(r,\theta),v(r,\theta)) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. De plus, Comme les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2,\pi/2[$ et f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, g est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2,\pi/2[$.
Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2,\pi/2[$, $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)$.
2. On remplace y par $r\sin(\theta)$ et x par $r\cos(\theta)$ dans l'EDP :
$$r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) - r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0.$$
D'après la question précédente, on trouve $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$.
3. On trouve donc qu'il existe $C : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $g(r,\theta) = C(r)$. De plus la fonction g étant $\mathscr{C}^1$, C est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puis, si $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, il existe $(r,\theta) = (\sqrt{x^2+y^2}, \pi/2 - \arctan(y/x)) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2,\pi/2[$ tel que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Donc $f(x,y) = C(\sqrt{x^2+y^2})$.
Synthèse : si $C : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, alors $f(x,y) = C(\sqrt{x^2+y^2})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Puis, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}C'(\sqrt{x^2+y^2})$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}C'(\sqrt{x^2+y^2})$, de sorte que $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercice 10 :

1. Déjà, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composition. De plus, $g'(t) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$ et $g'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x, y)$. On pose $t = 1$, de sorte que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose de nouveau $g : t \mapsto f(tx, ty)$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie $tg'(t) = tx\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \alpha g(t)$. Donc g est solution de $u' - \dfrac{\alpha}{t}u = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Les solutions sont $u(t) = Ct^{\alpha}$. Donc $g(t) = Ct^{\alpha}$. Pour $t = 1$, $C = g(1) = f(x, y)$. Donc pour tout $t > 0$, $f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$.
3. En reprenant g, on a $g'(t) = f(x, y)$, donc $f(x, y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$. En faisant tendre t vers 0, on obtient $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.