Trigonométrie et nombres complexes - Exercices

I. Trigonométrie

Exercice 1. Déterminer les valeurs exactes de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ (sous réserve de définition) pour les réels x suivants :

$$1. x = \frac{5\pi}{6} \quad 2. x = \frac{27\pi}{2} \quad 3. x = \frac{7\pi}{4} \quad 4. x = -\frac{59\pi}{6} \quad 5. x = \frac{17\pi}{4} \quad 6. x = \frac{29\pi}{3}$$

Exercice 2. Calculer les cosinus, sinus et tangentes en a , b , $a + b$ et $a - b$ lorsque cela est possible :

$$1. \begin{cases} \sin a = \frac{2}{3}, & 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \sin b = \frac{5}{5}, & \frac{\pi}{2} < b < \pi \end{cases} \quad \left| \quad 2. \begin{cases} \cos a = -\frac{1}{2}, & \frac{\pi}{2} < a < \pi \\ \sin b = -\frac{1}{3}, & \pi < b < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \left| \quad 3. \begin{cases} \cos a = \frac{5}{13}, & 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \sin b = \frac{12}{13}, & 0 < b < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice 3. Soit x un réel tel que les expressions suivantes sont bien définies. Simplifier ces expressions :

$$1. A = \sin(x + \pi) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right); \quad 2. B = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad 3. C = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$4. D = \cos x + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Exercice 4. 1. À l'aide des formules d'addition, déterminer les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente de $\frac{\pi}{12}$.

2. En déduire les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente des angles $\frac{3\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 5. 1. Déterminer les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente de $\frac{\pi}{8}$.

2. En déduire les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente des angles $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{-5\pi}{8}$.

Exercice 6. Résoudre l'équation $\cos 2x + \cos x = 0$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}; \quad b) \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right); \quad c) \tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right); \quad d) \tan(x) \tan(2x) = 1$$

Exercice 8. 1. Démontrer que pour tout réel x , $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin(x + \varphi)$, où φ est un réel dont on précisera la valeur.

2. Résoudre dans $] -\pi, \pi]$ l'équation : $\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) \cos x - \sin x = 1; \quad b) \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = -\sqrt{2}; \quad c) (\sqrt{3} + 1) \cos x + (\sqrt{3} - 1) \sin x + \sqrt{3} - 1 = 0$$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) \cos x \leq \frac{1}{2}; \quad b) |\sin x| \leq \frac{1}{2}; \quad c) -1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}; \quad d) \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

II. Nombres complexes

Exercice 11. Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{l} a) z = (3 + 2i)^2(2 - i) \\ b) z = (1 + i\sqrt{3})^4 \\ c) z = (1 - i)(1 - 2i)(1 - 3i) \\ d) z = (1 + i)(2 - i)(3 + i)(4 - i) \\ e) z = (1 + i)(1 + 2i)^2(1 + 3i)^3 \\ f) z = \left(\frac{3}{4} - 2i\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{i}{2}\right) \\ g) z = (2 + i)^3 + (1 - 2i)^3 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} h) z = i + \frac{1}{i} \\ i) z = \frac{2 + i}{1 - i} \\ j) z = \frac{1}{(1 - i)(2 - i)} \\ k) z = \frac{(-3 + 4i)(5 - 4i)}{15 - 10i} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} l) z = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)^3} \\ m) z = \frac{1}{a + a^2 i}, a \in \mathbb{R}^* \\ n) z = \frac{1}{1 - i} + \frac{2}{1 - 2i} + \frac{3}{1 - 3i} \\ o) z = 1 + \frac{i}{2 + \frac{i}{3}} \end{array}$$

Exercice 12. 1. Calculer $(1 + i)^n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 .

2. En déduire la valeur de $(1 + i)^n$ en fonction de n .

II. Nombres complexes

Exercice 13. 1. Soient : $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = z_1 \times z_2$. Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ (cf. exercice 4)

2. a étant un nombre réel, exprimer les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

a) $z = \cos a + i \sin a$	d) $z = \sin a + i \cos a$	g) $z = e^{ia} + 1$
b) $z = \cos a - i \sin a$	e) $z = -\cos a - i \sin a$	h) $z = e^{ia} - 1$
c) $z = -\sin a + i \cos a$	f) $z = -\sin a - i \cos a$	

3. Déterminer le module et un argument de : $z_1 = (1 + i)^n + (1 - i)^n$ et de $z_2 = (1 + i \tan a)^n$.

Exercice 14. 1. Écrire sous forme exponentielle :

a) $1 + i$	b) $1 - i$	c) $i - 1$	d) $\sqrt{3} + i$
------------	------------	------------	-------------------

2. En déduire les parties réelles et imaginaires de :

a) $\frac{(1 - i)^5}{(1 + i)^4}$	b) $(1 + i)^{44}$	c) $\left(\frac{-4}{\sqrt{3} + i}\right)^{19}$
----------------------------------	-------------------	--

Exercice 15. Soit z un nombre complexe de module 1. Simplifier $|z + 1|^2 + |z - 1|^2$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z + 2\bar{z} = 5 + 3i$	2. $3\bar{z} = 2z + i$	3. $* \bar{z}^2 + 2 z ^2 - 3 = 0$
----------------------------	------------------------	-----------------------------------

Exercice 17. * On note $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Soient a, b et c trois nombres réels et les trois nombres complexes :

$$z_1 = a + b + c; z_2 = a + bj + cj^2; z_3 = a + bj^2 + cj.$$

1. Déterminer le module et un argument de j .
2. Calculer j^3 et $j + j^2$.
3. Déterminer la valeur de $s_k = 1 + j^k + j^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. (a) Préciser les parties réelles et imaginaires de z_1, z_2 et z_3 .
(b) Démontrer que ces nombres complexes sont tous réels si et seulement si $b = c$.
5. (a) À quelle condition ces complexes sont-ils égaux à un même réel? Déterminer en particulier a, b et c de sorte que $z_1 = z_2 = z_3 = 1$.
(b) Déterminer les valeurs de a, b et c pour lesquelles $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1\}$.

Exercice 18. 1. Factoriser $e^{ip} + e^{iq}$ et $e^{ip} - e^{iq}$.

2. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 avec $z_1 z_2 \neq -1$. Vérifier que $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est réel, puis l'exprimer en fonction des arguments de z_1 et z_2 .

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1$.

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer, lorsque cela est possible, le module et un argument de $z = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$.

Exercice 19. 1. Justifier qu'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $4 - 3i = 5e^{i\theta_0}$, puis donner une valeur approchée au millièmes de θ_0 avec la calculatrice.

2. Écrire $4 \cos t - 3 \sin t$ sous la forme $A \cos(t + \varphi)$ puis sous la forme $B \sin(t + \psi)$.

Exercice 20. Soit A, B, C, D quatre points du plan d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D . On note I, J, K et L les milieux de $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

Calculer les affixes des vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{LK}$. Que dire de $IJKL$?

Exercice 21. On rappelle que l'isobarycentre d'un triangle ABC est le point G vérifiant $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. Soient $A(2 - 3i), B(2 - i)$ et $C(5 + 5i)$. Quel est l'affixe de l'isobarycentre du triangle ABC ?