Contrôle de cours 1 - Inégalités, calculs - Sujet A
Lundi 9 septembre 2024

Question 1 (2 pts)

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-6		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty \,\|\, 2$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	4

1. Résoudre l'inéquation : $f(x) < 2$.
   L'ensemble des solutions est $S =]-\infty, -6[\cup]-6, -3[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 4$.
   L'ensemble des solutions est $S = \emptyset$. ☐

Question 2 (1,5 pt)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner la définition de la partie entière de x : la partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
2. Écrire un encadrement avec x, $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1$: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. ☐

Question 3 (1 pt)

Résoudre l'équation $|x-4| = 3$ (on pourra faire un dessin).
La distance entre x et 4 doit valoir 3. Autrement dit, $|x-4| = 3 \iff x-4 = 3$ ou $x-4 = -3$. Ainsi l'ensemble des solutions est $S = \{7, 1\}$. ☐

Question 4 (1 pt)

Soient a et b deux réels tels que $a \in [-1, 5]$ et $b \in [1, 3]$. Donner un encadrement simple de $-3a + 2b$.
Comme $-1 \leq a \leq 5$, on a $-15 \leq -3a \leq 3$. Comme $1 \leq b \leq 3$, on a $2 \leq 2b \leq 6$.
En ajoutant, on obtient $-13 \leq -3a + 2b \leq 9$. ☐

Question 5 (1 pt)

Énoncer l'inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \leq |x| + |y|$. ☐

Question 6 (1 pt)

Compléter les formules suivantes :

1. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
2. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ ☐

Question 7 (1 pt)

Donner les valeurs suivantes :

$$\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

☐

Question 8 (3 pts)

Résoudre l'inéquation
$$\frac{1-u}{1+u} \geq 1.$$

On passe tout à gauche : $\dfrac{1-u}{1+u} - 1 \geq 1 \iff \dfrac{1-u}{1+u} - \dfrac{1+u}{1+u} \geq 0 \iff \dfrac{-2u}{1+u} \geq 0$.
On dresse un tableau de signes avec une ligne par facteur.

u	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-2u$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+u$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2u}{1+u}$		$-$	$\Vert$	$\boxed{+}$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} =]-1, 0]$. □

Contrôle de cours 1 - Inégalités, calculs - Sujet B
Lundi 9 septembre 2024

Question 1 (2 pts)

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-6		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$0 \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	6	$\searrow$	4

1. Résoudre l'inéquation : $f(x) < 2$.
   L'ensemble des solutions est $S =]-\infty, -6[\, \cup\,]-6, -3]$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = -1$.
   L'ensemble des solutions est $S = \emptyset$. ☐

Question 2 (1,5 pt)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner la définition de la partie entière de x : la partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
2. Écrire un encadrement avec x, $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1$: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. ☐

Question 3 (1 pt)

Résoudre l'équation $|x - 3| = 4$ (on pourra faire un dessin).
La distance entre x et 3 doit valoir 4. Autrement dit, $|x - 3| = 4 \iff x - 3 = 4$ ou $x - 3 = -4$. Ainsi l'ensemble des solutions est $S = \{7, -1\}$. ☐

Question 4 (1 pt)

Soient a et b deux réels tels que $a \in [-1, 5]$ et $b \in [1, 3]$. Donner un encadrement simple de $-2a + 3b$.
Comme $-1 \leq a \leq 5$, on a $-10 \leq -2a \leq 2$. Comme $1 \leq b \leq 3$, on a $3 \leq 3b \leq 9$.
En ajoutant, on obtient $-7 \leq -2a + 3b \leq 11$. ☐

Question 5 (1 pt)

Énoncer l'inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$. ☐

Question 6 (1 pt)

Compléter les formules suivantes :

1. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
2. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ ☐

Question 7 (1 pt)

Donner les valeurs suivantes :

$$\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

☐

Question 8 (3 pts)

Résoudre l'inéquation
$$\frac{1-u}{1+u} \leq 1.$$

On passe tout à gauche : $\dfrac{1-u}{1+u} - 1 \leq 1 \iff \dfrac{1-u}{1+u} - \dfrac{1+u}{1+u} \leq 0 \iff \dfrac{-2u}{1+u} \leq 0.$
On dresse un tableau de signes avec une ligne par facteur.

u	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-2u$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+u$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2u}{1+u}$		$\boxed{-}$	$\Vert$	$+$	0	$\boxed{-}$	

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$. □