Inégalités - Exercices

Exercice 1. 1. Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible (c'est-à-dire en les simplifiant au maximum). Il faut essayer de faire le maximum de simplifications à chaque étape avant de continuer les calculs.

(a) $A = \frac{1}{2} \times \frac{8}{7}$

(b) $B = \frac{7}{8} \times \frac{4}{18} \times \frac{3}{14}$

(c) $C = 3 \times \frac{9}{2}$

(d) $D = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$

(e) $E = \frac{3}{\frac{9}{2}}$

(f) $F = \frac{\frac{9}{2}}{3}$

(g) $G = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right)$

(h) $H = \left(3 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{8-2}{5+2}$

(i) $I = \dfrac{3 - \frac{5}{7} + \frac{1}{2}}{3 + \frac{5}{7} - \frac{1}{2}}$

(j) $J = \dfrac{5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$

2. Mettre les fractions suivantes au même dénominateur puis simplifier au maximum. Il faut essayer de choisir le dénominateur le plus simple à chaque fois.

(a) $A = \frac{2x-1}{x-1} + \frac{3x}{x-2}$

(b) $B = \frac{u-1}{u+1} - \frac{u+1}{u-1}$

(c) $C = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{(2x-1)^2}$

Exercice 2. Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression.

1. $A = \frac{5^2+4^2}{34+28}$
2. $B = 10^1 + 2.10^2 + 3.10^3$
3. $C = \frac{2.10^5 \times (5.10^2 + 2.10^3)}{7.10^1 + 2.10^2}$
4. $D = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$
5. $E = \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2}$
6. $F = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9}$
7. $G = (a^3)^2 \times a^{-4}$
8. $H = a^2 b^{-3} (ab)^4$

Exercice 3. 1. Calculer les nombres suivants (les résultats doivent être mis sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers) :

(a) $A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$

(b) $B = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$

(c) $C = (2\sqrt{2} - 5)(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

(d) $D = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(e) $E = (3\sqrt{2}-1)^2 - (2\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$

(f) $F = (2\sqrt{5} - 3)^2 - (2\sqrt{5} + 3)^2$

2. Écrire les nombres suivants comme des quotients ayant un dénominateur entier :

(a) $A = \sqrt{\frac{1}{24}}$

(b) $B = \frac{3}{\sqrt{2}}$

(c) $C = \frac{5}{2\sqrt{3}}$

(d) $D = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

(e) $E = \frac{3}{\sqrt{2} - 1}$

(f) $F = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

(g) $G = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

(h) $H = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

Exercice 4. 1. Développer et réduire les expressions suivantes.

(a) $A(x) = -(x-3) + 3(2x-1) - 2(2x-3)$

(b) $B(x) = x - 2 - 5(x-3) - 3(-3x-4)$

(c) $C(x) = x(x-1)(x-4) - x^2(x-3)$

(d) $D(x) = (x-1)^2(x+2) - (2x+1)^2(x+1)$

(e) $E(x, y) = (3x - 2y)^2 - 5(x + 3y)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes.

(a) $A(x) = (x+1)(x-3) - 2(x+1)$

(b) $B(x) = (5-2x)(x-1) + x^2 - 1$

(c) $C(x) = (1-2x)^2 - x^2$

(d) $D(x) = 4x^2 - 1 + (2x-1)(x+1)$

(e) $E(x) = 4x^2 - 8x + 4 - (x+7)^2$

(f) $F(x) = x^2 - 4 + x - 2$

(g) $G(x) = (2x-3)^2 - (2x-3)$

3. (a) Posons $A = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

i. Vérifier que $A^2 = 16$.

ii. Justifier que $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} \leq \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$. Quel est le signe de A?

iii. Que vaut A?

(b) Reprendre les trois questions précédentes pour montrer que :

i. $B = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{10}$ ii. $C = \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14}$ iii. $D = \sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{14}$

Exercice 5. 1. Résoudre les équations/inéquations suivantes :

(a) $13x+2-(x-3)=x-5-3(x+12)+4x$
(b) $5(3x-1)-(1-2x)\leq 3(5x-2)$
(c) $\dfrac{a-1}{4}-5<\dfrac{2a-3}{2}+\dfrac{3}{4}$
(d) $\dfrac{2x+3}{6}-\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{x+2}{3}+2$
(e) $\dfrac{1-2\alpha}{5}-\dfrac{\alpha-2}{10}>\dfrac{5\alpha+2}{2}-\dfrac{1}{5}$
(f) $\dfrac{3x+5}{7}=\dfrac{5x-2}{5}$
(g) $\dfrac{5(t-2)}{8}+\dfrac{3(1-t)}{5}=\dfrac{2t+3}{10}$

2. Exprimer l'inconnue entourée en fonction des autres :

(a) $\dfrac{2Ru}{nT}=\dfrac{1}{\boxed{A}}$
(b) $\dfrac{2R\boxed{u}}{nT}=\dfrac{1}{A}$
(c) $\dfrac{2Ru}{n\boxed{T}}=\dfrac{1}{A}$
(d) $\dfrac{a}{\boxed{b}}=\dfrac{c}{d}+1$
(e) $U_2=\dfrac{\frac{\boxed{U_m}}{R_4}+\frac{V_0}{R_3}}{\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_3}}$

3. Résoudre les équations/inéquations suivantes en factorisant au maximum :

(a) $(x+2)^2=(x+2)(5x-4)$
(b) $9x^2-16\leq 0$
(c) $(2x+3)^2=49$
(d) $5x^2-7x>0$
(e) $4x^2-9-2(2x-3)=0$
(f) $(3x-4)(5x+7)<(3x-4)(3x+1)$

4. Résoudre les équations suivantes en utilisant le discriminant :

(a) $2x^2-3x+1=0$
(b) $3x^2+5x+4=0$
(c) $-\dfrac{3}{4}x^2-6x+4=-x^2-3x-5$
(d) $\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}=0$
(e) $-x^2+2x-9>0$
(f) $(x-2)^2+3(x-1)\left(x-\dfrac{5}{3}\right)=0$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ (en fonction du paramètre m pour les deux dernières) :

a) $\dfrac{1}{x}>-1$
b) $-1<\dfrac{1-u}{1+u}<1$
c) $0\leq\dfrac{y-1}{y+1}\leq 1$
d) $x^2\leq x^3$
e) $\dfrac{1}{\theta}\leq\theta$
f) $a^3\leq\dfrac{1}{a}$
g) $\dfrac{(1+x^2)(5-x)}{1-2x}\leq 0$
h) $\dfrac{(1+x)(5-x)}{(1-2x)(3-2x)}\geq 0$
i) $\dfrac{(2x+3)(2-7x)}{x-4}\geq 3$
j) $\dfrac{m}{x-1}\leq\dfrac{1}{x+2}$
k) $\sqrt{2x+m}\geq x+1$

Exercice 7. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $|x-2|=1$
b) $|x-3|\geq 2$
c) $|x-4|=2x+10$
d) $|x-2|=2|x+1|$
e) $|2x+1|<1$
f) $|x-1|<|x+1|$
g) $|x+3|-2|x-1|>2$
h) $|x^2-x+1|=4x-5$

Exercice 8. Soient $a\in[1,5]$, $b\in[-2,3]$ et $c\in[2,3]$.

1. Majorer : (a) $a+b$ (b) $2a+3b$ (c) $a-b$ (d) $2c-b-1$ (e) $\dfrac{a+b}{c}$
2. Minorer : (a) $a+b$ (b) $2a+3b$ (c) $a-b$ (d) $2c-b-1$ (e) $\dfrac{a+b}{c}$

Exercice 9. 1. Montrer que pour tout $x\geq 0$, $\sin(x)\leq x$, puis $\cos(x)\geq 1-\dfrac{x^2}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x\geq 1+x$.

Exercice 10. 1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$, $\dfrac{x^2-3x+2}{x+\sqrt{x}-2}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-2)}{\sqrt{x}+2}$.

2. En déduire que pour tout $x\in[0,2]\setminus\{1\}$, $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x+\sqrt{x}-2}\right|\leq 2$.

Exercice 11. 1. Soit $a \in]1,+\infty[$.

(a) Résoudre l'équation $X^2 - 2aX + 1 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$.

(b) Justifier que $a - \sqrt{a^2-1}$ est strictement positif.

(c) Déterminer le signe de $\sqrt{a-1}(\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1})$.

(d) En déduire que $a - \sqrt{a^2-1} < 1$.

(e) Justifier que $a + \sqrt{a^2-1} > 1$.

2. Soit $y \in]1,+\infty[$. Justifier que l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet exactement deux solutions réelles, de signes opposés.

Exercice 12. Soient x et y deux nombres réels. Donner un expression explicite en fonction de x, y et $|x-y|$ de $\max(x,y) + \min(x,y)$, $\max(x,y) - \min(x,y)$ puis de $\max(x,y)$ et $\min(x,y)$.

Exercice 13. Soient a et b deux réels distincts. Déterminer une valeur $\varepsilon > 0$ en fonction de a et b telle que les intervalles $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ soient disjoints. On pourra faire un dessin pour s'aider.

Exercice 14. 1. (a) Calculer $\left\lfloor \frac{27}{13} \right\rfloor$, $\left\lfloor \sqrt{13} \right\rfloor$, $\lfloor 1,02 \rfloor$, $\lfloor 2,04 \rfloor$, $\lfloor 2,04 + 1,02 \rfloor$ et $\lfloor 2,04 \times 1,02 \rfloor$.

(b) Calculer $\left\lfloor -\frac{17}{3} \right\rfloor$, $\lfloor -1,02 \rfloor$, $\lfloor -2,04 \rfloor$ et $\lfloor -2,04 - 1,02 \rfloor$.

2. Tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. 1. Montrer que pour tout réel x, $0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1$.

2. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

3. A-t-on : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

4. A-t-on : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$?

5. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 16. 1. (a) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour avoir l'égalité $|xy| = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

2. Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que

(a) $\dfrac{1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2xy}$

(b) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

(c) $\dfrac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$

(d) $1 + \sqrt{xy} \leq \sqrt{1+x}\sqrt{1+y}$

(e) * $\dfrac{x}{x^4+y^2} + \dfrac{y}{x^2+y^4} \leq \dfrac{1}{xy}$.

3. (a) Montrer que : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$ pour tous $x, y > 0$.

(b) En déduire que : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$ pour tous $a, b, c > 0$.

Exercice 17. 1. Lorsque $x \in [0,1]$, vérifier que $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

2. Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer qu'au moins un des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice 18 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). 1. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels. En considérant la fonction polynomiale $P(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + xb_k)^2$, démontrer que :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

2. Montrer que pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n$ strictement positifs, on a : $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$.

I. Indications - Solutions

Exercice 6 :

a) $S =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

b) $S = \mathbb{R}_+^*$

c) $S = [1, +\infty[$

d) $S = \{0\} \cup [1, +\infty[$

e) $S = [-1, 0[\cup[1, +\infty[$

f) $S =]-\infty, -1]\cup]0, 1]$

g) $S = \left]\dfrac{1}{2}, 5\right]$

h) $S = \left[-1, \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}, 5\right]$

i) $S = \left]-\infty, -\dfrac{2\sqrt{22}+5}{7}\right] \cup \left[\dfrac{2\sqrt{22}-5}{7}, 4\right[$

j) $\dfrac{m}{x-1} \leq \dfrac{1}{x+2} \iff \dfrac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)} \leq 0$. Si $m = 1$, on a $\dfrac{3}{(x-1)(x+2)} \leq 0$ et $S =]-2, 1[$. Si $m = 0$, $S =]-2, +\infty[$. Si $m < 0$, $-\dfrac{2m+1}{m-1} \in]-2, 1[$ et $S =]-2, -(2m+1)/(m-1)]\cup]1, +\infty[$. Si $0 < m < 1$, $S =]-2, 1[\cup[-(2m+1)/(m-1), +\infty[$. Et si $m > 1$, $S =]-\infty, -(2m+1)/(m-1)]\cup]-2, 1[$.

k) On doit déjà avoir $2x + m \geq 0$, donc $x \geq \dfrac{m}{2}$. Si $x \leq -1$, l'inégalité est toujours vérifiée. Si $x \geq -1$, alors $\sqrt{2x+m} \geq x+1 \Rightarrow 2x+m \geq x^2+2x+1 \Rightarrow x^2 \leq m-1$. Donc si $m < 1$, $S =]-\infty, -1] \cap [m/2, +\infty[= [m/2, -1]$ si $m \leq -2$ et $= \emptyset$ si $m \in]-2, 1[$. Si $m \geq 1$, $S = [m/2, +\infty[\cap[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}] = \emptyset$ si $m \neq 2$ et $\{1\}$ si $m = 2$.

Exercice 7 :

a) $S = \{1, 3\}$

b) $S =]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[$

c) $S = \{-2\}$

d) $S = \{-4, 0\}$

e) $S =]-1, 0[$

f) $S = \mathbb{R}_+^*$

g) $S =]1/3, 3[$

h) $S = \{2, 3\}$

Exercice 8 :

1. (a) $a+b \leq 8$ (b) $2a+3b \leq 19$ (c) $a-b \leq 7$ (d) $2c-b-1 \leq 7$ (e) $\dfrac{a+b}{c} \leq 4$
2. (a) $a+b \geq -1$ (b) $2a+3b \geq -4$ (c) $a-b \geq -2$ (d) $2c-b-1 \geq 0$ (e) $\dfrac{a+b}{c} \geq -\dfrac{1}{2}$

Exercice 9 :

1. On commence par étudier la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$. Celle-ci est dérivable de dérivée $x \mapsto \cos(x) - 1$ qui est négative. Donc la fonction est décroissante et vaut 0 en 0. Elle est négative sur $\mathbb{R}_+$. On recommence avec $\cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.
2. On étudie $x \mapsto e^x - 1 - x$ de dérivée $x \mapsto e^x - 1$ qui est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 10 :

1. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x-2)$ et $x + \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$.
2. Remarquer que $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \leq 1$.

Exercice 11 :

1. (a) C'est une équation du second degré. Le discriminant vaut $\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a^2-1)$. Comme $a > 1$, $\Delta > 0$. L'équation a deux solutions $\dfrac{2a \pm \sqrt{4(a^2-1)}}{2} = a \pm \sqrt{a^2-1}$.

   (b) Comme $a^2 > a^2 - 1$, on a $\sqrt{a^2} > \sqrt{a^2-1}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $a > 0$, $a > \sqrt{a^2-1}$, donc $\boxed{a - \sqrt{a^2-1} > 0}$.

   (c) Comme $a - 1 < a + 1$, on obtient $\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1} < 0$, donc $\boxed{\sqrt{a-1}(\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1}) < 0}$.

   (d) En développant l'expression précédente, $a - 1 - \sqrt{a^2-1} < 0$, donc $\boxed{a - \sqrt{a^2-1} < 1}$.

   (e) On remarque que $\sqrt{a-1}(\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}) > 0$, donc $a - 1 + \sqrt{a^2-1} > 0$ d'où $\boxed{a + \sqrt{a^2-1} > 1}$.

2. Posons $X = e^x$ de sorte que l'équation se réécrit $X^2 - 2yX + 1 = 0$. D'après les questions précédentes, on a deux solutions $X_1 = y - \sqrt{y^2-1}$ et $X_2 = y + \sqrt{y^2-1}$, qui sont toutes les deux positives. Donc l'équation de départ a deux solutions $\boxed{\ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) < 0 \text{ et } \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) > 0}$.

Exercice 12 : $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$, $\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$ (distinguer les cas $x \geq y$ et $x < y$).

Exercice 13 : En faisant un dessin, on s'aperçoit que 2ε doit être plus grand que la distance entre a et b : $\varepsilon > \frac{|a-b|}{2}$. Pour le démontrer, on peut distinguer les cas $a < b$ et $b < a$.

Exercice 14 :

1. (a) $\left\lfloor \frac{27}{13} \right\rfloor = \left\lfloor 2 + \frac{1}{13} \right\rfloor = 2$, $\left\lfloor \sqrt{13} \right\rfloor = 3$, $\lfloor 1{,}02 \rfloor = 1$, $\lfloor 2{,}04 \rfloor = 2$, $\lfloor 2{,}04 + 1{,}02 \rfloor = 3$ et $\lfloor 2{,}04 \times 1{,}02 \rfloor = 2$.
   (b) $\left\lfloor -\frac{17}{3} \right\rfloor = -6$, $\lfloor -1{,}02 \rfloor = -2$, $\lfloor -2{,}04 \rfloor = -3$ et $\lfloor -2{,}04 - 1{,}02 \rfloor = -4$.
2. Voir Geogebra.

Exercice 15 :

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, donc $-2x \leq -2\lfloor x \rfloor < -2x + 2$. De plus, $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x$, donc en sommant, $-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 1$. Comme $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ est un entier, on a $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$ ou 1.
2. $\lfloor x \rfloor + n$ est un entier et de plus, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$, donc $\lfloor x \rfloor + n = \lfloor x + n \rfloor$
3. Non, par exemple, si $x = 1{,}5$ et $y = 1{,}5$, $\lfloor x + y \rfloor = 3$, mais $\lfloor x \rfloor + penty = 2$.
4. Non, voir l'exemple au-dessus : $x = 1{,}5$ et $n = 2$.
5. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$ et comme $\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x + y$, $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$, et $\lfloor x + y \rfloor + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à $x + y$. Donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \geq \lfloor x + y \rfloor + 1$.

Exercice 16 :

1. (a) Partir de $(x + y)^2 \geq 0$ et $(x - y)^2 \geq 0$.
   (b) Séparer les cas suivant le signe de xy. Si $xy \geq 0$, l'égalité est vraie ssi $(x - y)^2 = 0$ donc $x = y$. Si $xy < 0$, on trouve $x = -y$.
2. Comme x et y sont strictement positifs, on peut multiplier les inégalités par x et y sans problème et se ramener à l'inégalité du 1. Pour la 2d, mettre au carré. Pour la 2e, substituer x et y^2 puis x^2 et y dans l'inégalité du 1.
3. (a) Montrer $\frac{1}{a} + a \geq 2$ pour tout $a > 0$.
   (b) Passer la somme à gauche puis développer.

Exercice 17 :

1. On vérifie en faisant une étude de fonction, ou en mettant la fonction sous forme canonique.
2. Que se passe-t-il si un des trois réels est ≥ 1 ?
   Lorsque $a, b, c \in [0, 1]$, donner un encadrement de $a(1 - b)b(1 - c)c(1 - a)$ et raisonner par l'absurde.

Exercice 18 :

1. On suppose que le b_k ne sont pas tous nuls. P est une fonction polynômiale de degré 2. De plus, elle a au maximum 1 racine. Donc son discriminant est positif ou nul, ce qui donne l'inégalité voulue.
2. On utilise $a_k = \sqrt{x_k}$ et $b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$.