

Devoir sur temps libre 2

(À remettre le MARDI 24 SEPTEMBRE 2024)

Exercice 1 (Des racines n -ièmes de l'unité).

On fixe un entier naturel $n \geq 2$ et on considère tout d'abord l'équation

$$(E_n) : z^n = 1$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Soit z une solution de (E_n) .
 - (a) Justifier que $|z| = 1$.
 - (b) En déduire qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$.
 - (c) Justifier qu'il existe $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
2. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_n) à l'aide de ω .
3. Dans cette question, on prend $n = 3$ et on pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - (a) Justifier que $1, j$ et j^2 sont les solutions de (E_3) .
 - (b) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $1, j$ et j^2 dans le plan complexe.
 - (c) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
4. On revient au cas général.
 - (a) Développer et simplifier $S = (1 - \omega)(1 + \omega + \dots + \omega^{n-1})$.
 - (b) Que peut-on en déduire sur la somme $1 + \omega + \dots + \omega^{n-1}$.
 - (c) Justifier que pour $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\overline{\omega^k} = \omega^{n-k}$.
5. Dans cette question, on prend $n = 5$.
 - (a) À l'aide des question 4b et 4c, montrer que $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.
 - (b) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 2 (Des calculs!!).

1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité puis dériver les fonctions :

- | | | |
|---|-----------------------------|------------------------------|
| a) $a(x) = \frac{x^5}{5} - 4x^2 + \frac{2x}{3} - 3$ | b) $b(x) = Ax^2 + Bx + C$ | c) $c(x) = \frac{x+3}{1-2x}$ |
| d) $f(x) = \sin(3x) + \cos\left(\frac{x}{5}\right)$ | e) $g(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$ | f) $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$ |

Dresser le tableau de variation complet de la fonction $c(x) = \frac{x+3}{1-2x}$.

2. Calculer les limites :

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2}$ | b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 3}{x^2 - 4x + 1}$ | c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ | e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x + 1}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ |