Contrôle de cours 2 - Trigonométrie et complexes - Sujet A
Mercredi 18 septembre 2024

Question 1 (2 pts)

Résoudre l'équation :

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Deux angles ont le même cosinus si et seulement si ils sont soit égaux, soit opposés, modulo 2π. Donc l'équation est équivalente à : $3x - \frac{\pi}{3} \equiv x - \frac{\pi}{4} [2\pi]$ ou $3x - \frac{\pi}{3} \equiv -\left(x - \frac{\pi}{4}\right) [2\pi]$.

La première donne $x \equiv \frac{\pi}{24} [\pi]$, la seconde $x \equiv \frac{7\pi}{48} [\pi/2]$.

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv \frac{\pi}{24} [\pi]\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv \frac{7\pi}{48} [\pi/2]\right\}$. □

Question 2 (2 pts)

Résoudre l'inéquation $\sin x \geq -\frac{1}{2}$. On pourra faire un dessin.

En s'aidant du cercle trigonométrique, l'inéquation est équivalente à : $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. □

Question 3 (2 pts)

1. Écrire sous forme algébrique :
   $z_1 = \frac{3-i}{1+5i} = \frac{(3-i)(1-5i)}{|1+5i|^2} = \frac{-2-16i}{26} = \frac{-1-8i}{13}$
2. Écrire sous forme exponentielle :
   $z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ □

Question 4 (2 pts)

1. Énoncer l'inégalité triangulaire pour les complexes :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

2. Énoncer les formules d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

Question 5 (3 pts)

1. Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Factoriser par l'angle moitié :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{ip} + \mathrm{e}^{iq} &= \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}} \left(\frac{\mathrm{e}^{ip}}{\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}} + \frac{\mathrm{e}^{iq}}{\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}}\right) \\ &= \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}} \left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{p-q}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}. \end{aligned}$$

2. En déduire la formule de factorisation pour

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

en prenant les parties réelles dans la factorisation par l'angle moitié. □

Contrôle de cours 2 - Trigonométrie et complexes - Sujet B
Mercredi 18 septembre 2024

Question 1 (2 pts)

Résoudre l'équation :

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Deux angles ont le même cosinus si et seulement si ils sont soit égaux, soit opposés, modulo 2π. Donc l'équation est équivalente à : $3x-\frac{\pi}{4}\equiv x-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $3x-\frac{\pi}{4}\equiv -\left(x-\frac{\pi}{3}\right)[2\pi]$.

La première donne $x\equiv -\frac{\pi}{24}[\pi]$, la seconde $x\equiv \frac{7\pi}{48}[\pi/2]$.

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\equiv -\frac{\pi}{24}[\pi]\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\equiv\frac{7\pi}{48}[\pi/2]\right\}$. ☐

Question 2 (2 pts)

Résoudre l'inéquation $\sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$. On pourra faire un dessin.

En s'aidant du cercle trigonométrique, l'inéquation est équivalente à : $\exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $\frac{-4\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq \frac{\pi}{3}+2k\pi$.

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{4\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. ☐

Question 3 (2 pts)

1. Écrire sous forme algébrique :
   $z_1=\frac{3-i}{5+i}=\frac{(3-i)(5-i)}{|5+i|^2}=\frac{14-8i}{26}=\frac{7-4i}{13}$
2. Écrire sous forme exponentielle :
   $z_2=\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ☐

Question 4 (2 pts)

1. Énoncer l'inégalité triangulaire pour les complexes :

$$\forall z,z'\in\mathbb{C},\ |z+z'|\leq|z|+|z'|$$

2. Énoncer les formules d'Euler :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\ \text{ et }\ \sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Question 5 (3 pts)

1. Soit $p,q\in\mathbb{R}$. Factoriser par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}e^{ip}+e^{iq}&=e^{i\frac{p+q}{2}}\left(\frac{e^{ip}}{e^{i\frac{p+q}{2}}}+\frac{e^{iq}}{e^{i\frac{p+q}{2}}}\right)\\&=e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\\&=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}.\end{aligned}$$

2. En déduire la formule de factorisation pour

$$\sin(p)+\sin(q)=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

en prenant les parties imaginaires dans la factorisation par l'angle moitié. □