Contrôle de cours 3 - Fonctions - Sujet A
Mercredi 25 septembre 2024

Question 1 (2 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Donner la définition de f est strictement croissante sur I :

   f est strictement croissante sur I ssi $\forall x, y \in I$, si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$.

2. Donner la définition de f est minorée sur I :

   f est minorée sur I ssi $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, f(x) \geq m$.

Question 2 (3 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. Donner la définition de f est dérivable en a.
   f est dérivable en a ssi la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque $h \to 0$ existe et est finie.
2. On suppose que f est dérivable en a. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Question 3 (2 pts)

Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$. $\square$

Question 4 (4 pts)

1. Déterminer proprement la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\dfrac{\sin(x)}{x}$.
   Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. Comme $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, par encadrement, $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et dériver $f : x \mapsto \sqrt{\ln(1+3x)-1}$
   On doit avoir $1+3x > 0$, c'est-à-dire $x > -\dfrac{1}{3}$ et $\ln(1+3x)-1 > 0$, c'est-à-dire $\ln(1+3x) > 1$ donc $1+3x > e^1$ et $x > \dfrac{e^1-1}{3}$. Donc f est dérivable sur $I = \left]\dfrac{e^1-1}{3}, +\infty\right[$. De plus, on pose $u : x \mapsto \ln(1+3x)-1$ dont la dérivée est $u' : x \mapsto \dfrac{3}{1+3x}$. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{3}{2(1+3x)\sqrt{\ln(1+3x)-1}}$.

Contrôle de cours 3 - Fonctions - Sujet B
Mercredi 25 septembre 2024

Question 1 (2 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Donner la définition de f est strictement décroissante sur I :

$$f \text{ est strictement croissante ssi } \forall x, y \in I, \text{ si } x < y \text{ alors } f(x) > f(y).$$

2. Donner la définition de f est majorée sur I :

$$f \text{ est majorée sur } I \text{ ssi } \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, f(x) \leq M.$$

Question 2 (3 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. Donner la définition de f est dérivable en a.
   f est dérivable en a ssi la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque $h \to 0$ existe et est finie.
2. On suppose que f est dérivable en a. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Question 3 (2 pts)

Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$. $\square$

Question 4 (4 pts)

1. Déterminer proprement la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\dfrac{\cos(x)}{x}$. Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\cos(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. Comme $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, par encadrement, $\dfrac{\cos(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et dériver $f : x \mapsto \sqrt{\ln(1+2x)-1}$ On doit avoir $1+2x > 0$, c'est-à-dire $x > -\dfrac{1}{2}$ et $\ln(1+2x)-1 > 0$, c'est-à-dire $\ln(1+2x) > 1$ donc $1+2x > \mathrm{e}^1$ et $x > \dfrac{\mathrm{e}^1-1}{2}$. Donc f est dérivable sur $I = \left]\dfrac{\mathrm{e}^1-1}{2}, +\infty\right[$. De plus, on pose $u : x \mapsto \ln(1+2x)-1$ dont la dérivée est $u' : x \mapsto \dfrac{2}{1+2x}$. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2}{2(1+2x)\sqrt{\ln(1+2x)-1}}$.