Correction du Devoir sur temps libre 2

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) Comme $z^n = 1$, on prend le module des deux côtés et $|z^n| = 1$. Or $|z^n| = |z|^n$, donc $|z|^n = 1$. Or $|z|$ est un nombre réel positif, donc $\boxed{|z| = 1}$.

   (b) D'après la question précédente, la forme trigonométrique de z est $z = |z|\mathrm{e}^{i\varphi}$ pour un certain $\varphi \in \mathbb{R}$. Or il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\varphi \equiv \theta[2\pi]$, donc $\boxed{z = \mathrm{e}^{i\theta}}$.

   (c) D'après la question précédente, $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta} = 1$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2k\pi$. D'où $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$ et $z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
   D'autre part, $k = \dfrac{n\theta}{2\pi}$, et comme $\theta \in [0, 2\pi[$, $k \in [0, n[$. Puis, k étant entier, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
   En conclusion, $\boxed{\text{il existe } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \text{ tel que } z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}$.

2. D'après la question précédente, si z est solution, alors $z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour un certain $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
   Réciproquement, on vérifie que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\left(\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = 1$.
   Enfin, si $k, k' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ avec $k \neq k'$, alors $\dfrac{2ik\pi}{n}, \dfrac{2ik'\pi}{n} \in [0, 2\pi[$ et ils sont différents, donc $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq \mathrm{e}^{\frac{2ik'\pi}{n}}$.
   Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_n) \text{ est } \left\{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, \text{ avec } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}}$.

3. (a) En mettant j sous forme trigonométrique, on trouve $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. D'après la question précédente, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{j^0, j^1, j^2\} = \{1, j, j^2\}}$.

   (b) On fait un dessin !

   (c) On peut calculer $AB = |j-1| = \left|\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} - 1\right| = \left|\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}(\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{3}})\right| = \left|2i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{3}$. De même, on trouve $BC = \sqrt{3}$ et $AC = \sqrt{3}$. Donc $\boxed{ABC \text{ est équilatéral}}$.

4. (a) En simplifiant, on trouve $\boxed{S = 1 - \omega^n = 1 - 1 = 0}$.

   (b) Comme $\omega \neq 1$, $\boxed{\text{la somme est nulle}}$.

   (c) Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. On a $\omega^{n-k} = \mathrm{e}^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}} = \mathrm{e}^{2i\pi - \frac{2ik\pi}{n}} = \mathrm{e}^{2i\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2ik\pi}{n}}$, donc $\boxed{\omega^{n-k} = \overline{\omega^k}}$.

5. (a) D'après la question 4b, $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$. D'après la question 4c, $\omega^4 = \overline{\omega}$ et $\omega^3 = \overline{\omega^2}$, donc $1 + \omega + \overline{\omega} + \omega^2 + \overline{\omega^2} = 0$. Or $\omega + \overline{\omega} = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et de même $\omega^2 + \overline{\omega^2} = 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
   Ainsi, $\boxed{1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 0}$.

   (b) On remarque que $\dfrac{4\pi}{5} = 2 \times \dfrac{2\pi}{5}$. Notons $\alpha = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, de sorte que $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 2\alpha^2 - 1$ (formule de duplication).
   D'où, $1 + 2\alpha + 2(2\alpha^2 - 1) = 0$ et $4\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$.
   Le discriminant de cette équation est $\Delta = 20$, donc les deux solutions sont $\dfrac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Or, $\dfrac{2\pi}{5} \in [0, \pi/2]$, donc $\alpha \geq 0$. Ainsi, $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. (a) $a(x) = \dfrac{x^5}{5} - 4x^2 + \dfrac{2x}{3} - 3$: la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\boxed{a'(x) = x^4 - 8x + \dfrac{2}{3}}$.

   (b) $b(x) = Ax^2 + Bx + C$: la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\boxed{b'(x) = 2Ax + C}$.

   (c) $c(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}$: la fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, et $\boxed{c'(x) = \dfrac{1 \times (1-2x) - (x+3)(-2)}{(1-2x)^2} = \dfrac{7}{(1-2x)^2}}$.

   (d) $f(x) = \sin(3x) + \cos\left(\dfrac{x}{5}\right)$: la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f'(x) = 3\cos(3x) - \dfrac{1}{5}\sin\left(\dfrac{x}{5}\right)}$.

(e) $g(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$: la fonction est dérivable lorsque $\ln(x+1) > 0$, c'est à dire lorsque $x+1 > 1$, donc $x > 0$. De plus, en posant $u(x) = \ln(x+1)$, on a $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, et $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, d'où $\boxed{g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x+1}}{2\sqrt{\ln(x+1)}} = \dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}}$.

(f) $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$: la fonction est dérivable lorsque $x > 0$ et $\ln(x) > 0$, donc $x > 1$ et $\ln(\ln(x)) > 0$, donc $\ln(x) > 1$ et $x > \mathrm{e}$. Donc sur $]\,\mathrm{e}, +\infty[$. Pour calculer la dérivée, on pose $u(x) = \ln(\ln(x))$, de sorte que $h'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Puis, $u(x) = \ln(v(x))$, avec $v(x) = \ln(x)$, de sorte que $u'(x) = \dfrac{v'(x)}{v(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

D'où $\boxed{h'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}}$.

On a déjà la dérivée de c, qui est positive sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ car $(1-2x)^2 \geq 0$.

De plus, $c(x) = \dfrac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} c(x) = -\dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} c(x)$.

Enfin, comme $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} x+3 = \dfrac{7}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} 1-2x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} 1-2x = 0^-$, on a $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} c(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} c(x) = -\infty$.

D'où le tableau de variation complet :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$c'(x)$		$+$	‖	$+$	
c	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$

2. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{x^2-2}$: $\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-2} = \dfrac{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x^2}}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{x^2-2} = 1}$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+3}{x^2-4x+1}$: $\dfrac{5x+3}{x^2-4x+1} = \dfrac{x\left(5+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{5+\frac{3}{x}}{x\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+3}{x^2-4x+1} = 0}$.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2}$: on utilise la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2} &= \frac{(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2})(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-2})}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-2}} \\
&= \frac{x^2+2-(x^2-2)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-2}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-2}}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-2} = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2} = 0}$.

(d) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$: on factorise le numérateur : $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ car les deux racines sont 1 et 2. Donc $\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$. D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = 1-2 = -1}$.

(e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x+x)}{x+1}$: on factorise par ce qui va le plus vite vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(e^x+x)}{x+1} &= \frac{\ln\left(e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\\ &= \frac{x+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{x}}+\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$ et d'après les croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$.

D'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x+x)}{x+1} = 1}$.

(f) $\lim_{x\to0^+} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$: on utilise un encadrement : pour tout $x>0$, on a

$$\begin{aligned}-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1\\ -x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to0^+} x = \lim_{x\to0^+} -x = 0$, donc par encadrement, $\boxed{\lim_{x\to0^+} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0}$.