Devoir sur temps libre 3

(À remettre le JEUDI 17 OCTOBRE 2024)

Exercice 1 (Des récurrences).

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1 + n(n-1)$.

Exercice 2 (Une récurrence).
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+a}$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

Exercice 3 (Encore une!).
Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall x \in [-1, +\infty[$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 4 (La dernière... jusqu'à la prochaine).
Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n$.

Exercice 5 (Des négations). Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs puis nier les assertions suivantes :

1. f est inférieure ou égale à g.
2. f est la fonction nulle.
3. f ne s'annule jamais.
4. Tout réel admet au moins un antécédent par f.
5. Il existe un réel plus grand que tous les autres.

Exercice 6 (Des fonctions). 1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 1$.
On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x))$ et $g : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$.

2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et g.
3. Calculer les dérivée de f et g et justifier que $f' = g'$.
4. En déduire que $f = g$.
5. Simplifier $\mathrm{sh}\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)$ et $\mathrm{ch}\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)$.
6. Calculer $f\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)$.
7. En déduire que $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.