# Contrôle de cours 4 - Fonctions / Logique - Sujet A
## Mercredi 9 octobre 2024

**Question 1 (3 pts)**

Domaine de définition, de dérivabilité et dérivées des fonctions réciproques des fonctions circulaires :

1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
   La fonction arctan est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   et $\forall x \in I, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
2. La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$
   La fonction arccos est dérivable sur $J = ]-1, 1[$
   et $\forall x \in J, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$
   La fonction arcsin est dérivable sur $K = ]-1, 1[$
   et $\forall x \in K, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Question 2 (1pt)**

$$\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

□

**Question 3 (2 pts)**

1. On veut démontrer une assertion qui commence par $\forall x \in E$, que fait-on en premier ?
   On fixe $x \in E$.
2. On veut démontrer une assertion qui commence par $\exists x \in E$, que doit-on faire ?
   On doit trouver un exemple de $x \in E$ qui fonctionne. □

**Question 4 (2 pts)**

Vrai ou faux ? Justifier !

1. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$
   FAUX ! En effet, $x = 1 \in \mathbb{N}$ est un contre-exemple car $x^2 = 1 \leq 7$.
2. $\exists x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = 0$
   VRAI ! En effet, $x = -\frac{1}{2}$ convient. □

**Question 5 (2 pts)**

Écrire avec des quantificateurs : il existe un réel plus grand que tous les autres.
$\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$

Écrire la négation de : $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R} \mid y - x \leq 2$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R} \mid y - x > 2$

**Question 6 (3 pts)**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 5u_n - 4$. Démontrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 1 - 5^n$.
   Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 1 - 5^n$.
   - Initialisation : pour $n = 0$, $1 - 5^0 = 0 = u_0$, donc la propriété est vraie pour le rang 0.
   - Hérédité : soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = 1 - 5^n$. Montrons que $u_{n+1} = 1 - 5^{n+1}$.
     On a $u_{n+1} = 5u_n - 4$, donc par HR, $u_{n+1} = 5(1 - 5^n) - 4 = -5^{n+1} + 1$. La formule est vraie au rang $n + 1$.

   D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - 5^n$. □

# Contrôle de cours 4 - Fonctions / Logique - Sujet B
# Mercredi 9 octobre 2024

**Question 1 (3 pts)**

Domaine de définition, de dérivabilité et dérivées des fonctions réciproques des fonctions circulaires :

1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
   La fonction arctan est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   et $\forall x \in I$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
2. La fonction arccos est définie sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,\pi]$
   La fonction arccos est dérivable sur $J = ]-1,1[$
   et $\forall x \in J$, $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$
   La fonction arcsin est dérivable sur $K = ]-1,1[$
   et $\forall x \in K$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Question 2 (1pt)**

$$\arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

□

**Question 3 (2 pts)**

1. On veut démontrer une assertion qui commence par $\forall x \in E$, que fait-on en premier ?
   On fixe $x \in E$.
2. On veut démontrer une assertion qui commence par $\exists x \in E$, que doit-on faire ?
   On doit trouver un exemple de $x \in E$ qui fonctionne. □

**Question 4 (2 pts)**

Vrai ou faux ? Justifier !

1. $\exists x \in \mathbb{N} \mid x^2 > 7$
   VRAI ! $x = 3$ convient car $x^2 = 9 > 7$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
   FAUX ! Par exemple, pour $x = 0$ on a $2x + 1 = 1 \neq 0$. □

**Question 5 (2 pts)**

1. Écrire avec des quantificateurs : il existe un réel plus petit que tous les autres.
   $\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$

2. Écrire la négation de : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R} \mid x^2 - y > 2$.
   $\exists x \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 - y \leq 2$

**Question 6 (3 pts)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 4u_n - 3$. Démontrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 1 - 4^n$.

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 1 - 4^n$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $1 - 4^0 = 0 = u_0$, donc la propriété est vraie pour le rang 0.
- Hérédité : soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = 1 - 4^n$. Montrons que $u_{n+1} = 1 - 4^{n+1}$.
  On a $u_{n+1} = 4u_n - 3$, donc par HR, $u_{n+1} = 4(1 - 4^n) - 3 = 1 - 4^{n+1}$. La formule est vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - 4^n$. □