Sommes et produits - Exercices

Exercice 1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Factoriser l'expression $a^{2m+1} + b^{2m+1}$ par $a + b$. Est-il possible de factoriser $a^{2m} + b^{2m}$ par $a + b$?

Exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. À l'aide de la formule du binome, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > -1$. On pose $a = x + 1$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a^n - 1 \geq n(a - 1)$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 3.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer la partie entière de $\displaystyle\sum_{k=1}^{25} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
4. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=10000}^{1000000} \frac{1}{\sqrt{k}}$ avec un erreur inférieure à $\dfrac{1}{50}$.

Exercice 4. Déterminer a et b dans $\mathbb{Z}$ tels que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
En s'inspirant de la méthode précédente, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 5. Calculer les sommes et produits :

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 6.

1. On souhaite calculer la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ d'une façon différente de celle vue en cours en utilisant notamment $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
   (a) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$ de deux façons différentes en fonction de S_1, S_2 et n.
   (b) En déduire la valeur de S_1.
2. En s'inspirant du 1, calculer S_2 puis $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Démontrer par récurrence que $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $b_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $c_n = (a_n)^2$.

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2^k + 4k + n - 3)$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$, $(x \in \mathbb{R})$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3 + (-1)^k}\right)^k$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$

Exercice 9. Soient n, p des entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Montrer les relations :

$$\text{a)} \quad \binom{n-1}{p-1} = \frac{p}{n}\binom{n}{p} \qquad \text{b)} \quad \binom{n+k}{k}\binom{n}{p} = \binom{n+k}{p+k}\binom{p+k}{k}$$

Exercice 10. Soit $n > 1$ un entier naturel. Exprimer le quotient $\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$ en fonction de $\dbinom{2n}{n}$.

Exercice 11. Montrer par récurrence sur n que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, on a :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Interpréter le résultat sur le triangle de Pascal.

Exercice 12. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$; b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} k\binom{n}{k}$; c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$; d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

Indication : On pourra utiliser la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2. En déduire la valeur de S_n.

Exercice 15. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq r \leq m, n$.

1. Que vaut le coefficient devant x^r dans le développement de $(1+x)^{m+n}$?
2. Que vaut le coefficient devant x^r dans le développement de $(1+x)^n(1+x)^m$?
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$.

Exercice 16.

1. Linéariser les expressions suivantes : a) $\sin^3(x)\cos^3(x)$; b) $\cos(x)\cos^2(2x)$
2. En déduire les valeurs des intégrales : a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos^2(2x)\mathrm{d}x$

Exercice 17. Exprimer :

1. $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$.
2. $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$.

Exercice 18. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a+k\theta)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^3(k\theta)$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sin(k\theta)$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(k\theta)$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\alpha)\sin(k\beta)$

Exercice 19. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} (i+j)$
2. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} (i+j)$
3. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} \min(i,j)$
4. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$
5. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} ij$
6. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i}{j-1}$
7. $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} 2^{-j}\binom{j}{i}$

Exercice 20.

1. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$.
2. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ en faisant apparaître une somme double.