Chapitre 5 : Sommes et produits

I. Manipulations de sommes/produits

Voir fiche.

II. Sommes de référence

II.1. Égalité de Bernoulli

Proposition II.1. *Soient a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k. \end{aligned}$$

En particulier, pour tout complexe x, $1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$.

Corollaire II.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Pour tous entiers naturels $p \leq d$,*

$$\sum_{k=p}^{d} u_k = u_p \frac{1 - q^{d-p+1}}{1-q}.$$

En particulier,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exemples II.1. Pour calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$, on passe par les complexes. Si $t \not\equiv 0\ [2\pi]$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikt} &= \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{it}} && \text{(somme géométrique)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}t}}{\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} && \text{(angle moitié)} \\ &= \mathrm{e}^{i\frac{n}{2}t} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}t\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kt) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

II.2. Somme des termes d'une suite arithmétique

Proposition II.3. *Pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.*
Plus généralement, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Pour tous entiers naturels $p \leq d$,

$$\sum_{k=p}^{d} u_k = (d-p+1)\frac{u_p + u_d}{2}.$$

II.3. Somme des carrés

Proposition II.4. *Pour tout* $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

III. Formule du binôme de Newton

III.1. Coefficients binomiaux

Définition III.1. Étant donnés deux entiers n et k avec $0 \leq k \leq n$, on note $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ qui se lit « k parmi n ».

Proposition III.1.

1. *Pour tout* $0 \leq n$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ *et* $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
2. *Pour tous* $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
3. *Formule de Pascal : pour tous* $0 \leq k \leq n-1$, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Remarque III.1. On peut calculer tous les coefficients binomiaux de proche en proche en les plaçant dans le triangle de Pascal en utilisant la formule de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	k	$k+1$	$\cdots$
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$			
$\vdots$										
n								$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	
$n+1$									$\binom{n+1}{k+1}$	

La première colonne et la diagonale ne contiennent que des 1, et chacun des autres éléments est obtenu en faisant la somme des éléments haut et haut-gauche.

III.2. Formule du binôme de Newton

Théorème III.2 (Formule du binôme de Newton)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque III.2. Pour $n = 2$, on retrouve l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Corollaire III.3. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ *et* $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

III.3. Applications

On se sert de la formule du binôme de Newton notamment pour linéariser des fonctions trigonométriques, ou lorsqu'on utilise la formule de Moivre.

Proposition III.4. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

1. ***Formules d'Euler :*** $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.
2. ***Formule de de Moivre :*** $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Exemples III.1.

- Linéarisons $\cos^4(x)$. On utilise la formule d'Euler, on développe et on regroupe les exponentielles par puissances opposées :

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{e^{4ix}+4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{16}+4\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{16}+\frac{3}{8} \\
\cos^4(x) &= \frac{\cos(4x)}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

- Exprimons $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. On utilise la formule de Moivre, on développe puis on prend la partie réelle/imaginaire :

$$\begin{aligned}
\cos(3x)+i\sin(3x) &= (\cos(x)+i\sin(x))^3 \\
&= \cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-3i\sin^3(x)
\end{aligned}$$

Donc $\cos(3x) = \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)$ et $\sin(3x) = -3\sin^3(x)+3\cos^2(x)\sin(x)$.

IV. Sommes doubles

Proposition IV.1. *Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$ et $I = [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Soient $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I. On a*

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Proposition IV.2. *Soient $a_1,\dots,a_n$ et $b_1,\dots,b_p$ deux familles de nombres complexes. Alors :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_i b_j.$$

En particulier :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j.$$

Proposition IV.3. *Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$ et $I = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \mid i \leq j\right\}$. Soient $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I. On a*

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}.$$