# Chapitre 6 : Applications des nombres complexes

## I. Équations algébriques

### I.1. Équations du second degré à coefficients complexes

**Proposition I.1.** *Tout nombre complexe non nul $z$ admet exactement deux racines carrées opposées.*

**Méthode.**
- Si $z = \rho e^{i\theta}$ est donné sous forme exponentielle, les deux racines carrées sont $\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\sqrt{\rho} e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$.
- Si $z = c + id$, on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a+ib)^2 = c + id$. On prend les parties réelles et imaginaires ce qui nous donne le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = c \\ 2ab = d \end{cases}$ à résoudre. On peut aussi utiliser l'égalité des modules $a^2 + b^2 = |z|$ qui peut permettre de simplifier les calculs.

*Remarque I.1.*
- Si $z = -\lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors les deux racines carrées de $z$ sont $\pm i\sqrt{\lambda}$.
- Il est **INTERDIT** d'utiliser la notation $\sqrt{z}$ lorsque $z$ est un nombre complexe.

**Théorème I.2**

*Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Soit $\Delta$ le discriminant du polynome $az^2 + bz + c$ et $\delta$ une racine carrée de $\Delta$. Alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions (éventuellement confondues) :*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

*Remarque I.2.* Si les coefficients sont réels et $\Delta < 0$, alors les deux solutions sont complexes conjuguées.

**Proposition I.3 (Relations coefficients-racines).** *Soient $z_1$ et $z_2$ les solutions (éventuellement confondues) de $az^2 + bz + c = 0$. Alors*

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

### I.2. Racines de l'unité

**Définition I.1.** On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

**Proposition I.4.**
- *L'ensemble $\mathbb{U}$ correspond au cercle trigonométrique dans le plan complexe.*
- *L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par multiplication et par division.*
- *Un nombre complexe $z$ est dans $\mathbb{U}$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.*

*Remarque I.3.* On dit que $\mathbb{U}$ muni de la multiplication est un groupe. De plus, la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{U}, \times)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation $z^n = 1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Si $z$ est solution, alors $1 = |z^n| = |z|^n$, donc $|z| = 1$. Ainsi $z \in \mathbb{U}$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Or $1 = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, d'où $n\theta = 0[2\pi]$. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2k\pi$, soit encore $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$.
On peut se contenter de chercher $\theta \in [0, 2\pi[$. On obtient donc :

**Théorème I.5**

*L'équation $z^n = 1$ a exactement $n$ solution $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ qui sont appelées **racines $n$-ièmes de l'unité**.*

*Remarque I.4.*
- Géométriquement, ces $n$ valeurs sont sur le cercle unité, aux sommets d'un $n$-gone régulier. On note souvent $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité.
- En posant $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$, les racines de l'unité sont $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$.

**Méthode.** Pour résoudre l'équation $z^n = w$, où $w \in \mathbb{C}$ est fixé :
- Si $w = 0$, la seule solution est $z = 0$.
- Si $w \neq 0$, on écrit $w = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$. On a donc $w = \left(\rho^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$. L'équation $z^n = w$ devient $z^n = \left(\rho^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$ soit $\left(\dfrac{z}{\rho^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n = 1$.

  Les solutions sont donc $z = \rho^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

**Proposition I.6.** *Soit $n \geq 2$.*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0 \quad \textit{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = (-1)^{n-1}.$$

### I.3. Équations de degré supérieur

**Définition I.2.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Une fonction $f$ est une **fonction polynomiale de degré** $n$ si elle s'écrit :

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des nombres complexes appelés **coefficients de** $f$ et $a_n \neq 0$.

**Proposition I.7.** *Soit $f$ une fonction polynomiale et $z_0$ une solution de $f(z) = 0$. Alors il existe une fonction polynomiale $g$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z - z_0)g(z)$.*

Pour résoudre des équations du type $f(z) = 0$, on pourra en général appliquer une des deux méthodes suivantes :
- procéder à un changement de variables afin d'obtenir une équation de plus petit degré que l'on sait résoudre.
- on cherche une racine évidente $z_0$, puis on factorise par $(z - z_0)$ pour faire diminuer le degré.

## II. Géométrie

**Théorème II.1**

*Soient $A, B, C$ trois points distincts du plan.*

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi] \quad \textit{et} \quad \frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|.$$

**Corollaire II.2.** *Soient $A, B, C$ trois points distincts du plan.*
- $(AB) \perp (CD) \iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ ;
- $(AB) \mathbin{/\!/} (CD) \iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ ;
- *$A, B, C$ sont alignés* $\iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ ;

**Proposition II.3.**
- *L'image $M'(z')$ de $M(z)$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ vérifie : $z' = z + z_{\vec{u}}$.*
- *L'image $M'(z')$ de $M(z)$ par la rotation d'angle $\theta$ vérifie : $z' = \mathrm{e}^{i\theta} z$.*
- *L'image $M'(z')$ de $M(z)$ par l'homothétie de rapport $k$ : $z' = kz$.*
- *L'image $M'(z')$ de $M(z)$ par la symétrie d'axe l'axe des réels vérifie : $z' = \overline{z}$.*