Applications des nombres complexes - Exercices

I. Équations

Exercice I.1. Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de :
a) e^{2i} ; b) $3+4i$; c) $7-24i$; d) $-15+8i$; e) $9+40i$

Exercice I.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $iz^2+3z-2i=0$
b) $z^2+3iz+4=0$
c) $z^2+(1+i)z+1-i=0$
d) $(2z^2-3z+2)^2+(z^2-3z+2)^2=0$
e) $z^4-(3+8i)z^2-16+12i=0$
f) $e^{2z}+e^z+1=0$

Exercice I.3. * Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+z^2+(-1+3i)z+44+12i=0$, sachant que celle-ci admet une racine réelle.

Exercice I.4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^4=\dfrac{16\sqrt{2}}{1-i}$ et $z^8=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$. On donnera les solutions sous forme exponentielle.

Exercice I.5. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
a) $(z-i)^4=1$; b) $(z-1)^4=(z+1)^4$

Exercice I.6. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
a) $z^8-(2i\sqrt{3}-2)z^4-8(1+i\sqrt{3})=0$; b) $z^{2n}+z^n+1=0$.

Exercice I.7. Résoudre :
a) $z^n=(z+1)^n$; b) $(1+iz)^{2n}=(1-iz)^{2n}$; c) * $z^7=\overline{\left(\dfrac{1}{z^2}\right)}$.

Exercice I.8. Soit $\omega=e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Formez une équation du second degré dont les racines sont $\alpha=\omega+\omega^4$ et $\beta=\omega^2+\omega^3$. La résoudre.
2. En déduire une valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
3. Calculer les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.
4. On considère dans le plan complexe le point B d'affixe i et le point Ω d'affixe $-\dfrac{1}{2}$. Le cercle de centre Ω passant par B rencontre l'axe $x'Ox$ en I et J. Calculez les abscisses des points I et J.
5. En déduire une construction à la règle et au compas, que l'on explicitera soigneusement, du pentagone régulier dont les sommets sont les images des racines cinquième de l'unité.

Exercice I.9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants. On pourra introduire $S=x+y$ et $P=xy$.

1. $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+y=4 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

II. Géométrie

Exercice II.1. Soient $A(2+4i)$ et $B(8+i)$. Montrer que le triangle OAB est rectangle.

Exercice II.2. On considère les points $A(1+i)$ et $B(-2+3i)$.

1. Déterminer l'affixe du point E tel que le triangle ABE soit un triangle équilatéral direct.
2. Déterminer les affixes des points C et D tels que $ABCD$ soit un carré direct.

Exercice II.3. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct ssi $a + bj + cj^2 = 0$.
2. On prend maintenant ABC un triangle quelconque du plan. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de bases $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Montrer que les centre de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Exercice II.4. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points d'affixe z vérifiant :

1. $(2+i)z + (2-i)\overline{z} = 2$;
2. $|1 + i + z| = 2$
3. $\begin{cases} |i - z| = 1 \\ |2 - z| = 2 \end{cases}$
4. $|z| = |1 - z| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$
5. $\arg(z - 2i) = \dfrac{\pi}{4} [2\pi]$
6. ** $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice II.5. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z-2}{z+i}$.

1. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.
2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

Exercice II.6.

1. Déterminer une racine réelle, puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = 0$$
2. Démontrer que les solutions sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.

Exercice II.7. ** Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tels que :

1. $M(z)$, $N(z^2)$ et $P(z^4)$ sont alignés.
2. $P(1)$, $M(z)$ et $N(z^2)$ forment un triangle rectangle.
3. $M(z)$, $N\left(\dfrac{1}{z}\right)$ et $P(-i)$ sont alignés.

Exercice II.8. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On considère l'équation $z^2 - \left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)z + 2^{2\theta} = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation. On note A et B les points images des solutions.
2. Déterminer θ pour que le triangle OAB soit équilatéral.

Exercice II.9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. On note Ω le point image de ω dans le plan. On considère la transformation du plan qui à un point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ vérifiant
$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

1. On prend $M \neq \Omega$. Justifier que $\Omega M = \Omega M'$ et que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.
2. Quelle est cette transformation du plan ?