# Contrôle de cours 5 - Logique / Sommes - Sujet A
# Mercredi 16 octobre 2024

### Question 1 (6 pts)

Soient $a, b, x, y, q \in \mathbb{C}$, $k, n, p, d \in \mathbb{N}$ avec $p \leq d$. Rappelez les formules :

- $\displaystyle\sum_{k=p}^{d} q^k = q^p \frac{1-q^{d-p+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$ et $= d-p+1$ si $q = 1$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- $\displaystyle a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
- $\displaystyle\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ ☐

### Question 2 (1 pt)

Compléter :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}$$

### Question 3 (3 pts)

Simplifier au maximum les sommes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k 1^{n-k} = (4+1)^n = 5^n$
2. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} 7^{n-k} = \sum_{k=3}^{n+1} 7^n 7^{-k} = 7^n \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{7^k} = 7^n \frac{1}{7^3} \frac{1-\frac{1}{7^{n-1}}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{7^{n-2}}{6}\left(1 - \frac{1}{7^{n-1}}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (6k+2) = 6\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 2 = 6\frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1) = 3n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(3n+2)$ ☐

### Question 4 (2pts)

Simplifier la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k-1)) &= = \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k+1) - \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k-1) \\ &= \sum_{i=3}^{n} \ln(i) - \sum_{i=1}^{n-2} \ln(i) \\ &= \ln(n) + \ln(n-1) + \cancel{\sum_{i=3}^{n-2} \ln(i)} - \left(\ln(1) + \ln(2) + \cancel{\sum_{i=3}^{n-2} \ln(i)}\right) \\ &= \ln(n) + \ln(n-1) - \ln(2).\end{aligned}$$

☐

**Question 5 (3 pts)**

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

- Initialisation : pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ et $\left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$, donc la formule est vraie au rang 1.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

  Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} + (n+1)^3$ par HR.

  Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{2^2} = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{2^2}$.

  Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ et la formule est vérifiée au rang $n+1$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $\square$

# Contrôle de cours 5 - Logique / Sommes - Sujet B
# Mercredi 16 octobre 2024

**Question 1 (6 pts)**

Soient $a, b, x, y, q \in \mathbb{C}$, $k, n, p, d \in \mathbb{N}$ avec $p \leq d$. Rappelez les formules :

- $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} q^k = q^a \frac{1-q^{b-a+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$ et $= b-a+1$ sinon.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
- $\displaystyle x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$
- $\displaystyle\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ □

**Question 2 (1 pt)**

Compléter :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$$

**Question 3 (3 pts)**

Simplifier au maximum les sommes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 6^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 6^k 1^{n-k} = (6+1)^n = 7^n$
2. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1} 5^{n-k} = \sum_{k=4}^{n+1} 5^n 5^{-k} = 5^n \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{5^k} = 5^n \frac{1}{5^4} \frac{1-\frac{1}{5^{n-2}}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5^{n-3}}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n-2}}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (8k+1) = 8\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 8\frac{n(n+1)}{2} + n = n(4n+5)$ □

**Question 4 (2pts)**

Simplifier la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(\sin(k-1)-\sin(k+1)) &= \sum_{k=1}^{n-1}\sin(k-1)-\sum_{k=1}^{n-1}\sin(k+1)\\ &= \sum_{i=0}^{n-2}\sin(i)-\sum_{i=2}^{n}\sin(i)\\ &= \sin(0)+\sin(1)+\cancel{\sum_{i=2}^{n-2}\sin(i)}-\left(\sin(n)+\sin(n-1)+\cancel{\sum_{i=2}^{n-2}\sin(i)}\right)\\ &= \sin(1)-\sin(n)-\sin(n-1)\end{aligned}$$

□

**Question 5 (3 pts)**

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

- Initialisation : pour $n=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ et $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$, donc la formule est vraie au rang 1.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

  Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} + (n+1)^3$ par HR.

  Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{2^2} = (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{2^2}$.

  Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ et la formule est vérifiée au rang $n+1$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ □