Devoir sur temps libre 4

(À remettre le LUNDI 4 NOVEMBRE 2024)

Exercice 1 (Une équation).
On cherche à résoudre l'équation $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\arcsin(x)$.
On pose $f : x \mapsto \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ et $g : x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   (b) Dresser le tableau de variations de g.
   (c) En déduire l'ensemble de définition D_f de f.
2. Justifier que f est impaire.
   On étudie donc la fonction f sur $D_f \cap [0, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que f est dérivable sur $[0, a[$ et sur $]a, 1[$. Calculer ensuite f' et simplifier son expression.
4. On pose $\Delta : x \mapsto f(x) - 2\arcsin(x)$.
   Déterminer l'ensemble de définition D de Δ puis son ensemble de dérivabilité.
5. Montrer que Δ est constante sur un intervalle $I \subset D$ à préciser et calculer la valeur de cette constante.
6. Donner une expression simple de $\Delta(x)$ pour $x \in ([0, +\infty[\cap D) \setminus I$.
7. Conclure.

Exercice 2 (Quelques sommes).
On fixe un entier naturel n non nul.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g\ :\ x \mapsto (1+x)^n$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, développer $g(x)$ en utilisant la formule du binôme.
   (b) En déduire les valeurs de $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$.
   (c) Déterminer g', la dérivée de g sur $\mathbb{R}$ sous deux formes.
   (d) En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. On pose $S'_1 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$ et $S'_2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots$.
   (a) Justifier que $S'_1 + S'_2 = 2^n$ et $S'_1 - S'_2 = 0$.
   (b) En déduire les valeurs de S'_1 et S'_2.
3. On pose maintenant

$$R_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots = \sum_{\substack{k=0 \\ 3 \text{ divise } k}}^{n} \binom{n}{k}$$

$$R_1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots = \sum_{\substack{k=0 \\ 3 \text{ divise } k}}^{n} \binom{n}{k}$$

$$R_2 = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots = \sum_{\substack{k=0 \\ 3 \text{ divise } k}}^{n} \binom{n}{k}$$

   On pose aussi $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (a) Rappeler la valeur de $1 + j + j^2$ en justifiant.
   (b) Déterminer j^k et j^{2k} en fonction de $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Que vaut $R_0 + R_1 + R_2$?
   (d) Justifier que $(1+j)^n = R_0 + R_1 j + R_2 j^2$ et $(1+j^2)^n = R_0 + R_1 j^2 + R_2 j$.
   (e) En factorisant par l'angle moitié, montrer que $(1+j)^n = e^{\frac{in\pi}{3}}$.
   (f) En déduire, à l'aide de la question 3a que $R_0 = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$.
4. Comment pourrait-on calculer la somme $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$?